عمر "محمد فؤاد" أبو الرُّب

مهارات وتمارين عقلية في الحساب

نسخة ابتدائية ثالثة تحت المراجعة

أغسطس - 2013

بسم الله الرحمن الرحيم

محتويات الكتاب

3 ..... **المقدمة**

5 ..... **الفصل الأول – عمليات الجمع في الدماغ**

9 ..... **الفصل الثاني – عمليات الجمع الطويل**

10 .....◄ منهج التمارين

10 .....◘ المبتدئون

11 .....◘ المتوسطون

11 .....◘ المتقدمون

12 ..... **الفصل الثالث - عمليات الطرح**

12 .....◄ الموازن

13 .....◄ المُتَمِّم

14 .....◄ الطريقة العشرية التقليدية

15 .....◄ طريقة المشوار

16 ..... **الفصل الرابع – عمليات الضرب**

16 .....◄ طريقة التضاعف

21 .....◄ طريقة المناورة

25 ..... **الفصل الخامس - عمليات القسمة**

25 .....◄ طريقة التضاعف في القسمة

29 .....◄ طريقة المناورة في القسمة

29 .....◄ طريقة القسمة البسيطة

32 ..... **الفصل السادس – الكسور**

38 ..... **الفصل السابع - العمليات التقليدية في الضرب والقسمة**

38 .....◄ الطريقة التقليدية في الضرب

41 .....◄ الطريقة التقليدية في القسمة

43 ..... **مؤلفات سابقة للمؤلف**

44 ..... **الملحق - التمارين والأجوبة**

المقدمة

هذا الكتاب يقدم طريقة تسمح للمهتمين بتطوير مهاراتهم الحسابية بحيث تصبح عملية الجمع والطرح عملية آلية في الدماغ وليست عملية تحزيرية (من حَزَّرَ). وتعتمد هذه الطريقة على التكرار ولكن بصورة منهجية وغير مملة.

وكذلك يقدم الكتاب طرقاً سريعة ومبتكرة في عمليات الضرب والقسمة باستخدام القلم والورقة دون الحاجة إلى الآلة الحاسبة.

كذلك فإن التمارين الحسابية الموجودة في هذا الكتاب تساعد في تقوية مهارة التركيز.

وهذه النقطة بحاجة إلى تعمق:
ما هو التركيز؟؟
ما هو تعريف التركيز؟؟؟

أحد الأساليب التي تستخدم في محاولة تعريف الشيء وإدراك مفهومه هو القيام بتعريف مضاده، ومضاد التركيز هو الشُّرود. ولهذا السبب فمن المفيد (وربما الأسهل) في تعريف التركيز هو دراسة موضوع الشرود:

والشرود هو عدم الصبر في العمليات العقلية (كالتفكير والاستماع والانتباه). بمعنى آخر فإن الشخص الشَّرود عندما يبدأ بحل مشكلة فإنك تراه يفكر في المشكلة، ثم فجأة ينشغل عنها بأفكار ليست ذات علاقة، وسرحان وأحلام يقظة، ثم بعدها يرجع إلى المشكلة وهكذا. والشخص الشرود كذلك إذا استمع إلى المحاضر فربما يقوم بالإنصات لوقت ثم تراه فجأة يسرح في أفكار ليست ذات علاقة، وأحلام يقظة ثم بعدها يعود إلى الإنصات وهكذا.

والسرحان هي صفة موجودة في جميع البشر ولكن بدرجات مختلفة. والشخص الشرود هو الشخص الذي يسرح وبدرجة أعلى بكثير من المستوى الطبيعي. وهنا كان تعريف التركيز وهو قدرة الصبر في تنفيذ العمليات العقلية.

وهناك الكثير من التمارين والألعاب العقلية التي تساعد في تقوية التركيز؛ منها الألعاب المنطقية (كالسُّدوكو - Sudoku)، والألعاب الإستراتيجية (كالشطرنج)، والألعاب العقلية الآلية (كألعاب التشابه والاختلاف، وألعاب الذاكرة، وكذلك التمارين الحسابية الموجودة في هذا الكتاب).

وميزة التمارين الحسابية (الموجودة في هذا الكتاب) أنها ليست بحاجة إلى جهد في المنطق والتفكير وإنما هي عمليات عقلية آلية مباشرة.

وهنا الهدف من هذا الكتاب: وهو تقوية مهارات الجمع والطرح، وتقوية مهارة التركيز باستخدام تمارين حسابية ليست بحاجة إلى جهد كبير في التفكير.

وتوجد هنا ملاحظة:

هذا الكتاب يستخدم الأرقام العربية المُستخدمة في المغرب العربي وأوروبا (9876543210) بدلا من الأرقام الهندية المُستخدمة في المشرق العربي (٩٨٦٧٤٥٣٢١٠)، وذلك لأن الأرقام العربية هي المستخدمة في الآلات الحاسبة؛ لذلك لو احتاج القارئ التأكد من صحة النتائج باستخدام الآلة الحاسبة فإن استخدام الأرقام العربية هنا سيكون مفيدا. ولكن يجب الانتباه أن المعادلات في الكتاب تُقْرأ من اليمين إلى اليسار (كما هي الكتابة العربية).

عمر محمد
2012-7-4
Email: omr.mhmd@ymail.com
Website: omr-mhmd.yolasite.com

الفصل الأول – عمليات الجمع في الدماغ

إذا لم يكن القارئ معتادا على عمليات الجمع فإن غلبة الظن أن القارئ سيقوم بعملية الجمع بأسلوب التحزير.

مثال:

لنفترض أن زيدا غير معتاد على عمليات الجمع وطُلِبَ منه جمع 8+5+7 ذهنيا دون استخدام الآلة الحاسبة أو الورقة والقلم. عندها قد يبدأ زيد بعمليات التحزير والتذكر، فيقول في نفسه ما جمع ثمانية وخمسة، وربما يهتدي صدفة إلى طريقة ما في عملية الجمع ويأتي بالجواب.

الآن .... طريقة الكتاب تقوم على اقتراح طريقة واضحة في الجمع.

وهنا السؤال .... ما الفائدة من اقتراح طريقة (أو طرق) ثابتة في الجمع؟؟؟

الفائدة هي إلغاء عمليات التحزير؛ فعندما يكون هناك طريقة واضحة في التنفيذ فهذا معناه أن عمليات التنفيذ تكون متتالية ومتتابعة (Systematic)؛ فلو كان القارئ يمتلك طريقة واضحة في الجمع فإنه سيقوم بتنفيذ الطريقة بخطواتها دون الحاجة إلى التحزير.

ولكن تنفيذ الطريقة يتم بتفكير وليس بشكل آلي. فكيف يُمكن امتلاك مهارة الجمع بشكل آلي وفوري ودون تفكير؟؟

لنسأل أولاً .... ما المقصود بـ "عمليات آلية" و "شكل آلي"؟؟؟

إذا سألنا شخصاً: ما جمع 1+1+1؟ فالجواب يأتي وبشكل آلي ولحظي دون تفكير، وهو: ثلاثة، وإذا سألنا ما جمع 5+5+5؟ فالجواب يأتي كذلك بشكل آلي ولحظي، وهو: خمسة عشر، ولكن إذا سألنا عن جمع 8+4+6؟ فغلبة الظن أن الجواب لا يأتي لحظيا وآليا وإنما نحن بحاجة إلى عمليات عقلية لاستخراج الجواب.

وهنا يوجد سؤال ... كيف يمكن تحويل طريقة الجمع من عمليات تفكير إلى عمليات آلية لحظية؟؟؟؟؟

والجواب هو: التكرار، فإذا كان القارئ يستخدم طريقة صحيحة في أي مهارة، وقام القارئ بممارسة هذه الطريقة بشكل مُتكرر وعلى فترة كافية من الزمن فإن هذه الطريقة ستترسخ في الدماغ ويتم تنفيذها وبشكل آلي ولحظي دون تفكير.

لنضرب الأمثلة:

عندما يتعلم زيد قيادة السيارة أول مرة فإنه يقوم بقيادة السيارة بشكل واع ويكون تفكيره منتبها لكل ما يجري حوله. ولكن بعد فترة كافية من الزمن تُصبح مهارة القيادة عنده هي مهارة آلية في الدماغ.

وما سبق ينطبق على جميع المهارات بما فيها المهارات الرياضية:

فالشخص عندما يلعب لعبة التنس أول مرة فإنه يلعبها بقدر عالٍ من النظرة الواعية والتي تتطلب عمليات تفكير متعددة. وهذا هو السبب في أن ردات فِعل المبتدئ لا تكون سريعة، حيث إن عمليات التفكير بحاجة إلى الوقت، ولكن ما إن يمارس الشخص لعبة التنس بطريقة صحيحة ولفترة كافية من الزمن فإن مهارة اللعبة تترسخ في الدماغ مما يجعل ردات الفعل أسرع في اللعبة، وتصبح المهارة هنا آلية.

وهنا الهدف ... وهو خلق طريقة صحيحة وواضحة في الجمع، وبعدها يقوم القارئ بعمل التمارين في الجمع (لنقل تمرين واحد على الأقل في اليوم). ومع التكرار ولفترة كافية من الزمن فإن طريقة الجمع ستترسخ في الدماغ لتصبح عملية الجمع أقرب إلى المهارة الآلية منها إلى التفكير.

دعونا نقترح هنا طريقة للجمع تعتمد على فكرة المُكَمِّلْ:

المكمل: هو القيمة اللازمة لتكملة العدد لأقرب عاشرة.

والعاشرة: هي أحد مضاعفات العشرة.

أمثلة:

9 مُكَمِّلُها هو 1 وجمعهما هو عشرة.
8 مُكملها هو 2 وجمعهما هو عشرة.
6 مُكملها هو 4 وجمعهما هو عشرة.
19 مُكملها هو 1 وجمعهما هو عشرون.
16 مُكملها هو 4 وجمعهما هو عشرون.
37 مُكملها هو 3 وجمعهما هو أربعون.
58 مُكملها هو 2 وجمعهما هو ستون.

الآن .... لنفترض أننا نريد جمع 8+6، عندها فإن منهج الجمع يكون كالتالي:

- لنأخذ العدد الذي له أقل تكملة (أي العدد الأقرب للعاشرة)، وهو هنا 8. لماذا؟؟
  لأن مكمل 8 هو 2، ومكمل 6 هو 4، وهذا معناه أن 8 أقرب للعاشرة من 6.
- المكمل لـ 8 هو 2 وجمعهما هو عشرة.
- نأخذ المكمل (وهو 2) من قيمة العدد التالي (وهو 6) ويصبح 4.
- ويكون الجواب هو 4+10 وتساوي 14.

الوصف السابق كان وصفا منطقيا لمنهج الجمع. ولكن الدماغ لا يقوم بعمليات منطقية كاملة وإنما يقوم بعمليات قفز. وكل عملية قفز تتضمن أكثر من عملية منطقية تتم بشكل آلي. ولهذا السبب فإن الطريقة التي يقوم بها الدماغ في تطبيق المنهج السابق ربما يكون كالتالي:

ثمانية زائد ستة، عندي عشرة وراح 2 من ستة، أربعة وعشرة، أربعة عشر.

وكلما زادت عمليات التكرار في تنفيذ الطريقة كلما قَلَّت خطوات القفز في الدماغ:

اثنان، أربعة، أربعة عشر.

مثال آخر:

اجمع 34+18 ذهنيا دون استخدام الآلة الحاسبة ودون استخدام الورقة والقلم.

الجواب:

- 18 هو العدد الأقرب إلى العاشرة. وتكملتها 2، وجمعهما 20.
- نطرح 2 من العدد التالي (34) ويكون 32.
- نجمع 32 و20 ويكون 52.

وأما ما يحدث في الدماغ فربما يكون التالي:

18، 20، 2، 32 و20، 52.

وبعد كثرة التمارين تصبح خطوات القفز أقل وربما تكون كالتالي:

20، 32، 52.

وهدفنا في هذا البحث هو تقليل عدد خطوات القفز بحيث تصبح عملية الجمع آلية دون أي خطوة، بمعنى آخر: إنه بمجرد رؤية السطر: 34+18 فإن الجواب يظهر إلى الدماغ دون أي عملية تفكير.

وهنا منهج التدريب في هذه المقالة:

- تقديم طريقة صحيحة وواضحة في الجمع.
- إعطاء الشخص الفرصة للقيام بعدد كبير من التمارين باستخدام طريقة الجمع.
- ومع تكرار تنفيذ الطريقة فإن الطريقة نفسها تصبح آلية في الدماغ.

انتبه هنا الآن ..... الطريقة المقترحة هنا في الجمع (طريقة المكمل) هي اقتراح من المؤلف، وهناك طرق أخرى تسمح للدماغ بالقيام بعملية الجمع. وأحد هذه الطرق هي الحفظ عن ظهر قلب لجميع احتمالات الجمع بين الأعداد من 1 إلى 9. وفي هذه الحالة تكون عمليات الجمع آلية دون تفكير.

الآن ..... إذا كان القارئ عنده طريقة أخرى صحيحة في الجمع وهو مرتاح لها ويراها أسهل من الطريقة المقترحة فليستخدمها وليقم بإهمال الطريقة المقترحة، فالهدف من الكتاب ليس فرض طريقة معينة في الجمع، وإنما الهدف هو تحويل الطريقة الصحيحة في الجمع إلى طريقة آلية في الدماغ.

وهنا الهدف من التمارين في هذا الكتاب:

1. أن تنتقل عمليات الجمع من عمليات تحزيرية إلى عمليات منهجية (أي أن هناك طريقة واضحة في الجمع).
2. أن تنتقل العمليات المنهجية إلى عمليات آلية في الدماغ.

الفصل الثاني – عمليات الجمع الطويل

المثال التالي هو مثال عن التمارين المتعلقة بالجمع الطويل والموجودة في فصل التمارين في هذا الكتاب:

					5	5	2	3	7	0	7	8	7	0	4
				7	3	9	8	0	9	3	5	7	0	5	4
										6	6	2	2	8	8
							9	9	2	6	9	2	5	1	9
						0	5	1	1	7	2	0	2	3	3
			9	4	2	1	1	6	4	4	7	3	6	2	1
							0	4	9	2	7	3	2	9	6
						4	0	5	6	9	8	0	5	9	4
						5	5	4	3	4	2	0	2	9	0

الباقي ←
النتيجة ←

والتمرين بعد الانتهاء منه سيكون كالتالي:

					5	5	2	3	7	0	7	8	7	0	4
				7	3	9	8	0	9	3	5	7	0	5	4
										6	6	2	2	8	8
							9	9	2	6	9	2	5	1	9
						0	5	1	1	7	2	0	2	3	3
			9	4	2	1	1	6	4	4	7	3	6	2	1
							0	4	9	2	7	3	2	9	6
						4	0	5	6	9	8	0	5	9	4
						5	5	4	3	4	2	0	2	9	0
		1	1	1	2	3	3	4	4	5	2	3	4	3	
		1	**0**	**2**	**2**	**7**	**3**	**6**	**5**	**6**	**5**	**8**	**5**	**9**	**9**

الباقي ←
النتيجة ←

وهنا بعض الأسئلة:

ما هو الباقي (Carried Amount, Reminder)؟

قبل قيام العرب بنشر النظام العشري فإن خمسة زائد خمسة عشر تساوي عشرتان والتي هي عشرون. كمثال على ذلك فإن الرقم خمسة كان رمزه عند الرومان هو "V"، والرقم عشرة رمزه هو "X". والخمسة عشر يتم كتابتها بـ "XV".

الآن .... خمسة زائد خمسة عشر هي XV + V وتساوي XVV وتساوي XX والذي هو العدد عشرون.

ولكن باستخدام النظام العشري فإن أسلوب الجمع يختلف: فنحن نقول في النظام العشري: إن خمسة زائد خمسة عشر هي 5 + 15، وهنا نقول: إن خمسة زائد خمسة تساوي "صفر" والباقي "واحد". ويتم ترحيل "الواحد" إلى الخانة العشرية التالية، وبعدها نقول: "واحد" زائد "واحد" يساوي اثنان. ويكون الجواب هو "صفر اثنان" (20) والذي هو عشرون.

المعروف في طريقة النظام العشري أن يكون الباقي فوق الأعداد كالمثال التالي في جمع 16 و17:

1	
1	**7**
1	**6**
3	**3**

ولكن في التمرين السابق فإن الباقي هو في أسفل الأعداد، لماذا؟؟

القارئ مُخَيَّر في جعل الباقي في أسفل الأعداد أو في أعلاها، وفي الحقيقة فإن القارئ بعد عدد من التمارين سيقوم بإهمال كتابة الباقي وحفظها في عقله. وأما سبب وضع الباقي في أسفل الأعداد (على خلاف العُرف) فهو أن كتابة النتيجة ستكون في أسفل الأعداد فليكن كذلك كتابة الباقي.

◄ منهج التمارين

◘ المبتدئون

قم بعمليات الجمع ذهنيا (أي بدون استخدام الآلة الحاسبة) في كل عامود (Column)، وضَعْ النتيجة و"الباقي" وانتقل إلى العامود التالي. والقلم هنا يُستخدم فقط في تسجيل النتيجة والباقي، وأما عمليات الجمع نفسها فيجب أن تتم ذهنيا دون مساعدة من الآلة الحاسبة أو القلم.

ومن المفيد للمبتدئين أن يقوموا بعملية الجمع لكل عامود مرتين للتأكد من الجواب: مرة من أعلى إلى أسفل ومرة أخرى من أسفل إلى أعلى. وإذا تشابهت النتيجة فهذا دلالة كبيرة أن النتيجة صحيحة. مثال ذلك في التمرين السابق يكون الجمع من أعلى إلى أسفل هو:

4+4+8+9+3+1+6+4+0 والجواب هو 9 والباقي 3.

ومن أسفل إلى أعلى:

0+4+6+1+3+9+8+4+4 والجواب هو 9 والباقي 3. وهو مطابق لما سبق.

◘ المتوسطون

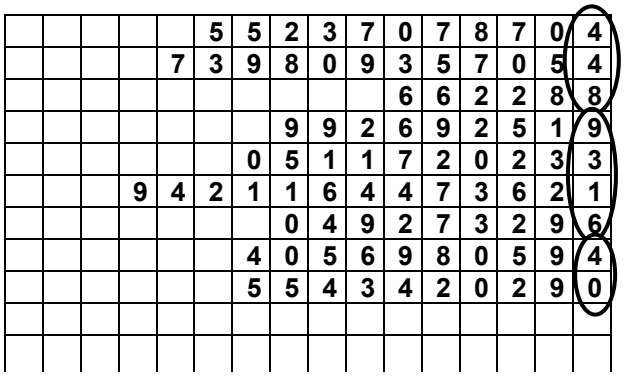
عندما تبدأ المهارة بالتقدم فإن الشخص سيجد أنَّه لا حاجة للقيام بالجمع لكل عامود مرتين وإنما مرة واحدة كافية (من أعلى إلى أسفل أو العكس) كما أنه لا حاجة لكتابة الباقي وإنما ستكون محفوظة في الدماغ.

◘ المتقدمون

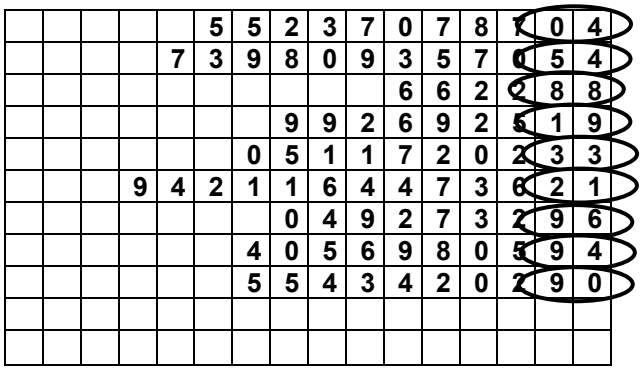
المبتدئون عندما يجمعون الأرقام فإنهم يقومون بجمع عددين فقط.

مثال: اجمع 4+7+8.

المبتدئون يقومون بجمع 4 و7 أولاً ويكون الجواب 11، ثم يتم جمع 11 و8 ويكون الجواب 19، ولكن مع الممارسة فإن الشخص سيبدأ (تلقائيا) بجمع عدة أرقام مرة واحدة:



وكذلك سيبدأ الشخص (تلقائيا) بجمع عامودين معا: أي جمع 4+54+88+ ... (إلخ):



الفصل الثالث - عمليات الطرح

في عمليات الجمع تعرضنا لمصطلح المُكَمِّل، وفي هذا الفصل سنتعرض لمصطلحين آخرين وهما الموازن (أو المُصَفِّر من صِفِرْ) والمُتَمِّمْ.

◄ **الموازن**

مثال: أوجد الناتج لـ 32 ناقص 7.

الآن ... ما العدد الذي يجب أن نضيفه إلى 32 كي يصبح الجواب 37؟

والجواب هو 5.

الآن .... ما الأمر المُمَيَّز في العدد 37 ؟

الجواب: 7 ناقص 7 يساوي صفر، وهذا معناه أن 37 ناقص 7 تساوي 30.

ولهذا السبب فإن 5 هنا هي العدد الموازن (أو المصفر) للمسألة السابقة.

لنعود إلى المسألة السابقة (32 ناقص 7) ونقول:

- نضيف 5 (الموازن) للمسألة السابقة فتصبح 37 ناقص 7 ويكون الجواب 30.
- نسترجع الـ 5 من الجواب (أي 30 ناقص 5) وجوابها سهل وهو 25 وهو جواب المسألة.

ويمكن أن نستخدم عبارات أكثر خيالية (ومتعة) في المحادثة بيننا وبين أنفسنا في حل المسألة السابقة، وهو ما سيؤدي لاحقا إلى سرعة ترسخ الطريقة في الدماغ. وأحد العبارات التي يمكن استخدامها هو التالي:

- لنأخذ 5 من الصندوق (من الخزانة، من المحفظة، إلخ) فتصبح المسألة هي 37 ناقص 7 وجوابها هو 30.
- نُرجِع 5 إلى الصندوق فيصبح الجواب 25.

مثال آخر:

أوجد الناتج لـ 44 ناقص 28.

الجواب:

- نضيف 4 إلى المسألة فتصبح 48 ناقص 28 وجوابها 20
- نسترجع الـ 4 من الجواب (أي 20 ناقص 4) ويكون الجواب النهائي 16.

◄ **المُتَمِّم**

المتمم شبيه جدا بالمكمل إلى الدرجة أنهما قد يتم اعتبارهما متطابقين.

مثال:

أوجد الناتج لـ 44 ناقص 28.

الحل:

- نضع 4 في اليد (في الرف، في الصندوق، أو على الطاولة، أو أي تشبيه أقرب لخيالك) فتصبح المسألة 40 ناقص 28.
- ونقول ما العدد المتمم لـ 28 ليصبح 40. والجواب هو أن 2 تُكَمِّل 28 إلى 30، والفرق بين 30 و 40 هو عشرة فيكون العدد المتمم هو 12.
- نرجع الـ 4 من اليد فيصبح الجواب هو 16.

بالطبع فإن التفصيل في الخطوات السابقة كان للشرح، ولكن ما يقوم به الدماغ هو عمليات قفز سريعة في الاستنتاج. وربما التالي ما يحدث في الدماغ:

44 ناقص 28. 4، 28 إلى 40، 2 و 10، 12 و4 تساوي 16.

مثال آخر:

أوجد الناتج لـ 83 ناقص 47.

الحل:

- 3 في اليد.
- 47 إلى 80: 3 إلى 50 و30 إلى 80، فيكون المتمم 33.
- استرجاع الـ 3 من اليد مع 33 فيكون الجواب 36.

وربما يكون التالي الأقرب لما يحدث في الدماغ:

- 3 في اليد.
- 47، 3، 30، 33.
- 33 و 3، 36.

◄ **الطريقة العشرية التقليدية:**

بالطبع فإن الطريقتين السابقتين يمكن استخدامهما بشكل سريع وآلي في أرقام بسيطة، ولكن عندما تتضخم الأرقام فإنه لا بد من استخدام الورقة والقلم واستخدام الطريقة التقليدية كما في المثال التالي:

أوجد الناتج لـ 7432 ناقص 568.

الجواب:

			7	4	3	2
				5	6	8

- نقول 2 ناقص 8. وبالطبع فإن الجواب سيكون بالسالب (أي سالب 6). ولكن العرب عندما نشروا النظام العشري فهم لم يتعاملوا مع الأعداد السالبة. ولمعالجة مسألة 2 ناقص 8 فقد وجد العرب الطريقة التالية:

نأخذ عشرة من الخانة المجاورة إلى اليسار فتصبح المسألة 2+10 ناقص 8 وهو 12 ناقص 8 والجواب هو 4.

ثم ننتقل إلى الخانة التالية ونقول كان هناك 3 في هذه الخانة وأخذنا منها 1 فتصبح 2.

انتبه هنا إلى أننا في الجمع عندما ننقل عشرة إلى خانة مجاورة "إلى اليسار" فإن "العشرة" تصبح "واحداً". ولكن في عمليات الطرح فعندما ننقل "واحدا" إلى خانة مجاورة "إلى اليمين" فإن "الواحد" يصبح "عشرة"، وهذا هو النظام العشري الذي نشره العرب إلى العالم.

- وننتقل إلى الخانة المجاورة وهو 3 ونطرح منه 1 الذي أخذناه وتصبح 2. وتكون المسألة هي 2 ناقص 6. ونأخذ 1 من الخانة المجاورة فتكون عشرة عند انتقالها وتصبح المسألة 12 ناقص 6 والجواب هو 6.

- وننتقل إلى الخانة المجاورة وهي 4 ونطرح منه 1 الذي أخذناه فتصبح 3. وتكون المسألة 3 ناقص 5. فنأخذ 1 من الخانة المجاورة فتكون عشرة عند انتقالها وتصبح المسألة 13 ناقص 5 والجواب هو 8.

			7	4	3	2
				5	6	8
			6	8	6	4

- وننتقل إلى الخانة المجاورة وهي 7 ونطرح منه 1 الذي أخذناه فتصبح 6 وتكون المسألة 6 ناقص صفر والجواب 6. ويكون الجواب النهائي هو 6864.

◄ **طريقة المشوار**

طريقة المشوار مفيدة جدا في طرح عدد أقل من عشرة من عدد أقل من عشرين (وهو الحاصل في الطريقة التقليدية). وهذا الأمر مفيد جدا كما في المثال التالي:

في بعض الأحيان يقوم الشخص بمحاولة إيجاد الجواب لـ 14 ناقص 8. وهنا يرتبك الشخص ولا يتذكر الجواب ويصل إلى حالة الصفنة (Stuckness) وهنا فائدة طريقة المشوار حيث إنها تساعد الشخص على الخروج من حالة الصفنة بأسلوب سريع.

والمشوار هي كلمة عامية شامية تعني الرحلة والطريق.

الآن .... في مسألة 14 ناقص 8:

نقول: المشوار من 14 إلى 10 هو 4. والمشوار من 10 إلى 8 هو 2. والجواب هو 4 زائد 2 وتساوي 6.

مثال آخر:

13 ناقص 7؟

نقول المشوار من 13 إلى 10 هي 3. ومن 10 إلى 7 هي 3، والجواب هو 6.

مثال آخر:

18 ناقص 9؟

نقول المشوار من 18 إلى 10 هي 8. والمشوار من 10 إلى 9 هو 1. والجواب هو 9.

مثال آخر:

12 ناقص 7؟

المشوار من 12 إلى 10 هو 2. والمشوار من 10 إلى 7 هو 3. والجواب هو 5.

الفصل الرابع – عمليات الضرب

هذا الفصل يُقدم طريقة منهجية بسيطة باستخدام الورقة والقلم تسمح بضرب أعداد كبيرة كضرب 9421164473621 في 511720233 والجواب هو: 482100047957266047369 3.

والآلات الحاسبة (عموما) لا تقدم هذا الرقم حيث إن خانات الآلة الحاسبة هي 9 خانات (على الأغلب)، ولكن الجواب هنا هو 22 خانة. وإذا وضعنا العددين السابقين في الآلة الحاسبة وضربناهما فإن النتيجة في الآلة تكون:
4.8210004795 E21 (أي 4.8 في "10 للقوة 21")، وهو جواب صحيح ولكنَّه ليس كامل الدقة.

والطريقة للوصول إلى الجواب الكامل هي: إما باستخدام برنامج كمبيوتر، أو باستخدام الآلة الحاسبة ولكن على أكثر من مرحلة، أو باستخدام طريقة التضاعف والتي سنشرحها هنا.

◄ **طريقة التضاعف**

لنبدأ شرح عملية الضرب بمثال بسيط: لنقم بضرب العددين 5674 في 723.

لنقل أن س تساوي 5674.

هذا معناه أن 2س (مضاعف س) تساوي 11348. وعملية المضاعفة سهلة جدا ويمكن عملها ذهنيا وبشكل سريع:

4 و4 هو 8، 7 و7 هو 14 ويكون 4 والباقي 1، 6 و6 هو 12 وهناك 1 يصبح 13 ويكون 3 والباقي 1، 5 و5 هو 10 وهناك 1 فيصبح 11، ويكون الجواب النهائي هو 11348.

ومع الممارسة فإن عملية المضاعفة تصبح أكثر سرعة وأقل خطوات وأكثر قفزا:

4 و4 :8، 7و7 :4 و1، 6 و6 و1 :3 و1، 5 و5 و1 :11.

وحتى الخطوات السابقة يمكن اختصارها بشكل أكبر مع تكرار الممارسة لتصبح أقرب إلى الآلية.

ومن مناسب جدا هنا (وخصوصا للمبتدئين) أن يقوموا بقسمة المضاعف على 2، وذلك للتأكد من الجواب، أي التأكد أن قسمة 11348 على 2 هو 5674. وأما إذا ظهر أن الجواب غير ذلك فهذا معناه أن هناك خطأ قد حدث ومن الضروري التأكد منه.

وقسمة العدد على 2 هو أمر سهل جدا ويمكن عمله ذهنيا ودون جهد:

1 على 2 صفر والباقي 1، 11 على 2 هو 5 والباقي 1، 13 على 2 هو 6 والباقي 1، 14 على 2 هو 7، 8 على 2 هو 4. والجواب هو 5674.

وبالطبع فإن ما يحدث في الدماغ هو قفزات بأقل كلام ممكن، ومن الممكن أن يكون التالي:

11 على 2؛ 5، 13؛ 6، ؛14 7، 8؛4 والجواب 5674.

وسيتم الحديث عن هذا الموضوع بالتفصيل في الفصل الخامس، باب القسمة البسيطة.

وبعد معرفة 2س (مضاعف س) فإننا نستطيع بسهولة استنتاج مضاعف المضاعف (4س) وذلك عن طريق مضاعفة الجواب السابق (11348) ويكون الجواب هو: 22696.

وكذلك من المفيد التحقق من هذا الجواب وذلك عن طريق قسمة المضاعف (22696) على 2 للتأكد أن الجواب هو 11348.

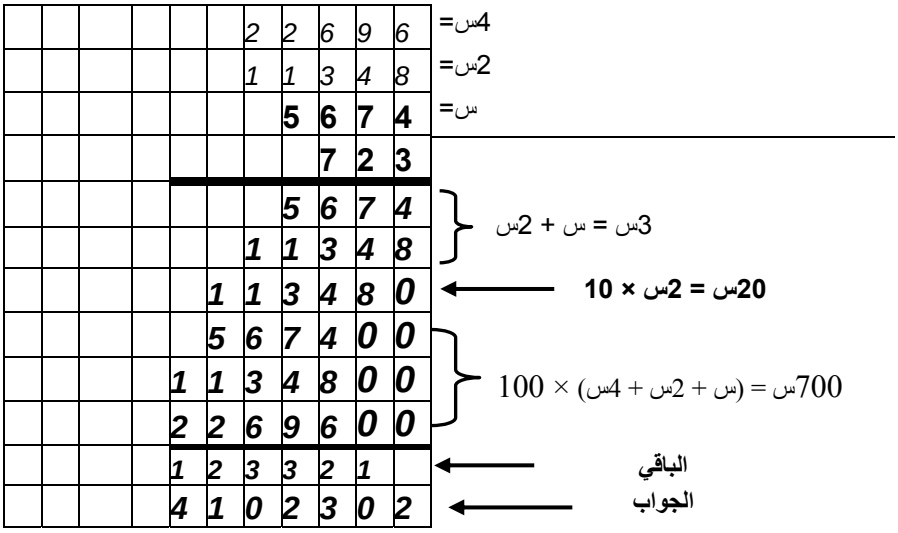
دعونا نختصر ما سبق:

- س = 5674.
- 2س = 11348.
- 4س = 22696.

الآن .... المطلوب هو معرفة النتيجة من ضرب 5674 في 723 والذي هو في الحقيقة التالي:
723 × 5674 = 723 × س = 3س + 20س + 700س

ولكن انتبه للتالي:
3س = س + 2س
20س= (2س) × 10
700س = (7س) × 100 = (س + 2س + 4س) × 100

وهذا يمكن استخدامه في الجدول التالي:



الآن ..... جميع الأعداد من 1 إلى 9 يمكن إيجادها باستخدام س و 2س و 4س كالتالي:

- س: موجودة.
- 2س: موجودة.
- 3س = س + 2س.
- 4س: موجودة.
- 5س= س + 4س.
- 6س = 2س + 4س.
- 7س = س + 2س + 4س.
- 8س = 4س + 4س.
- 9س = س + 4س + 4س.

وهذا معناه أن عملية الضرب قد تم تحويلها هنا إلى عمليات جمع منهجية (Systematic).

انتبه هنا الآن ..... استخدام الطريقة التقليدية في الضرب (والمشروحة في الفصل السابع) بالنسبة للمثال السابق بحاجة إلى 12 عملية ضرب بالإضافة إلى ثلاثة أعداد للجمع، وأما باستخدام طريقة التضاعف فإنها بحاجة فقط إلى عمليتي تضاعف (وهي ذهنية) وستة أعداد للجمع.

وقد لا تكون الفائدة من عملية التضاعف ظاهرة في ضرب الأعداد القليلة ولكن فائدتها تظهر جلية في ضرب الأعداد الكبيرة، كما في المثال التالي: أوجد حاصل ضرب العددين التاليين: 9421164473621 × 511720233.

الحل:

									3	7	6	8	4	6	5	7	8	9	4	4	8	4	4س
									1	8	8	4	2	3	2	8	9	4	7	2	4	2	2س
										9	**4**	**2**	**1**	**1**	**6**	**4**	**4**	**7**	**3**	**6**	**2**	**1**	س
														5	**1**	**1**	**7**	**2**	**0**	**2**	**3**	**3**	
										9	4	2	1	1	6	4	4	7	3	6	2	1	
									1	8	8	4	2	3	2	8	9	4	7	2	4	2	
									9	4	2	1	1	6	4	4	7	3	6	2	1	0	
								1	8	8	4	2	3	2	8	9	4	7	2	4	2	0	
							1	8	8	4	2	3	2	8	9	4	7	2	4	2	0	0	
																			0	0	0	0	
					1	8	8	4	2	3	2	8	9	4	7	2	4	2	0	0	0	0	
					9	4	2	1	1	6	4	4	7	3	6	2	1	0	0	0	0	0	
				1	8	8	4	2	3	2	8	9	4	7	2	4	2	0	0	0	0	0	
				3	7	6	8	4	6	5	7	8	9	4	4	8	4	0	0	0	0	0	
				9	4	2	1	1	6	4	4	7	3	6	2	1	0	0	0	0	0	0	
			9	4	2	1	1	6	4	4	7	3	6	2	1	0	0	0	0	0	0	0	
		9	4	2	1	1	6	4	4	7	3	6	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
	3	7	6	8	4	6	5	7	8	9	4	4	8	4	0	0	0	0	0	0	0	0	
		2	*3*	*4*	*4*	*4*	*4*	*6*	*7*	*6*	*6*	*6*	*5*	*5*	*5*	*4*	*2*	*2*	*1*				الباقي
	4	**8**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**4**	**7**	**9**	**5**	**7**	**2**	**6**	**6**	**0**	**4**	**7**	**3**	**6**	**9**	**3**	الجواب

انتبه هنا أن الطريقة التقليدية في الضرب في هذا المثال بحاجة إلى 117 عملية ضرب بالإضافة إلى 9 أعداد للجمع، وأما طريقة التضاعف فهي بحاجة فقط إلى عمليتي تضاعف و 13 عددا للجمع. وهنا تظهر فائدة طريقة التضاعف.

بالطبع فإن ورقة المربعات مفيدة جدا في حل هذه التمارين ولكنها ليست ضرورية، إذ يمكن تنفيذ هذه التمارين دون استخدام ورقة المربعات ولكن من الضروري الانتباه لترتيب الأرقام عند الجمع.

مثال:

أوجد الناتج لـ 7869673 × 51025.

الحل:

س = 786973

2س = 15739346

4س = 31478692

7869673 ×
51025
786973 — 5س = س + 4س
31478692
157393460 — 20س = 10 × 2س
00 — 0س × 100
786973**000** — 1000س = 1000 × س
7869730000 — 50,000س = 10,000 × (س + 4س)
31478692**0000**
401550064825

والجواب هو: 401550064825

مثال:

أوجد الناتج لـ 13575783 × 3128

الحل: س= 13575783، 2س = 27151566، 4س = 54303132

13575783 ×
3128
54303132
54303132
271515660
1357578300
13575783000
27151566000
42465049224

والجواب هو: 42465049224

مثال:

أوجد الناتج لـ 65603283 × 44050

الحل: س = 65603283، 2س = 131206566، 4س = 262413132

65603283
× 44050
0
656032830
2624131320
00
262413132000
2624131320000
2889824616150

والجواب هو: 2889824616150

◄ **طريقة المناورة**

الآن .... الطريقة السابقة (التضاعف) يمكن اختصارها لعمليات ضرب رقمين في رقمين:

لنأخذ عددا وليكن 26.

انتبه الآن إلى التالي:

أولا: 26 ضرب واحد جوابها هو العدد نفسه وهذا بديهي.

ثانيا: 26 ضرب 2 هو مضاعف العدد. وهذا سهل جدا كما تم تبيانه سابقا.

ثالثا: 26 ضرب 3 هو مضاعف العدد زائد العدد نفسه. وهذه عملية ذهنية سهلة:

$26 \times 3 = 26 \times (1+2) = 26 \times 2 + 26$

ويجب هنا الانتباه إلى الأقواس: فـ 26 ضرب 3 هي مضاعف 26 و26. ولكن إذا لم ينتبه الشخص للأقواس فقد يظن أن الجواب هو مضاعف 26 زائد واحد، وهذا خطأ.
وهنا النقطة ..... يجب الانتباه إلى الأقواس.

رابعا: 26 ضرب 4 هي مضاعف مضاعف العدد، أي نضاعف العدد (26) ثم نضاعف الجواب. وهذه عملية سهلة كذلك ذهنيا.

خامسا: 26 ضرب خمسة هي: العدد تقسيم 2 ثم ضرب 10، **أو** العدد ضرب 10 تقسيم 2، اختر أيهما أسهل لك.

مثال: 26 ضرب 5 تساوي (26 تقسيم 2) ضرب 10 وتساوي 13 ضرب 10 وتساوي 130.

ولكن 23 ضرب 5 فإن الأسهل أن نقول أنها (23 ضرب عشرة) تقسيم 2 وتساوي 230 تقسيم 2 وتساوي 115.

والسبب في ضرب العشرة أولا في العدد 23 أننا إذا قسمنا 23 على 2 أولا فسنحصل على كسر (11.5) وهذا قد يسبب بعض الارتباك.

النقطة هنا أن قسمة العدد على 2 وضربها بـ 10 هو عملية سهلة جدا.

سادسا: 26 ضرب 6 تساوي 26 ضرب خمسة زائد 26. وهذه العملية كذلك سهلة، حيث إن 26 ضرب خمسة سهلة حسابها ذهنيا كما تم تبيانه في النقطة الخامسة:

$26 \times 6 = 26 \times (5+1) = 26 \times 5 + 26$

سابعا: 26 ضرب 7 تساوي 26 ضرب 5 زائد مضاعف 26. وهذه العملية كذلك سهلة، حيث إن 26 ضرب خمسة سهلة حسابها ذهنيا كما تم تبيانه في النقطة الخامسة. ومضاعف الـ 26 كذلك سهل حسابه ذهنيا:

$26 \times 7 = 26 \times (5 + 2) = 26 \times 5 + 26 \times 2$

ثامنا: 26 ضرب 8 تساوي 26 ضرب (10 ناقص 2) وتساوي 260 ناقص مضاعف 26:

$26 \times 8 = 26 \times (10 - 2) = 260 - 26 \times 2$

تاسعا: 26 ضرب 9 تساوي 26 ضرب (10 ناقص 1) وتساوي 260 ناقص 26:

$26 \times 9 = 26 \times (10 - 1) = 260 - 26$

أخيرا: 26 ضرب عشرة جوابها هو صفر على يمين العدد 26. أي أن الجواب هو 260.

العمليات السابقة يمكن تنفيذها وبشكل سهل جدا وذلك عن طريق الانتباه إلى ثلاثة قِيَم يمكن استخراجها بسهولة وهي:

- مضاعف العدد (س) وتساوي 2س.
- مضاعف المضاعف وتساوي 4س.
- خَمْسَةُ العدد س وتساوي 10س تقسيم 2.

وأما باقي الأعداد فيمكن استخراجها ذهنيا كالتالي:

- س: موجودة.
- 2س: موجودة.
- 3س= س + 2س.
- 4س: موجودة.
- 5س: موجودة.
- 6س = 5س + س.
- 7س = 5س + 2س.
- 8س = 10س – 2س.
- 9س = 10س – س.
- 10س: موجودة.

مثال:

أوجد الناتج من ضرب 47 في 26.

الأسلوب الأول:

47 ضرب 26 تساوي (47 ضرب 6) زائد (47 ضرب 20).
ولكن 47 ضرب 6 تساوي (47 ضرب 5) زائد 47. وهذا أمر سهل حسابه ذهنيا: 47 ضرب 10، تقسيم 2، زائد 47 وتساوي 235 + 47 وتساوي 282.

و47 ضرب 20 هي مضاعف (47) ويمينها صفر. وتساوي 940.
والجواب هو 940 زائد 282 وتساوي 1222.

وباستخدام المعادلات:

$47 \times 26 = 47 \times (20 + 6)$.

$47 \times 6 = 47 \times (1+5) = 47\times5 + 47 = 235 + 47 = 282$

$47\times20 = 10 \times (47\times2) = 10 \times 94 = 940$

إذن: $47\times26 = 282 + 940 = 1222$

بالطبع الخطوات السابقة كان فيها تفصيل للشرح وما يحدث في الدماغ هو خطوات قفز أقل من ذلك.

الأسلوب الثاني:

26 ضرب 47 تساوي 26 ضرب (50 ناقص 3).

والجواب هو (26 ضرب 50) ناقص (26 ضرب 3)

والجزء الأول سهل: 26 ضرب 50 وتساوي 260 ضرب 5.

نضع الصفر في اليد ونقول 26 ضرب 5:

والجواب هو 26 تقسيم 2 والكل ضرب 10، وتساوي 13 ضرب 10، وتساوي 130. ونسترجع الصفر من اليد فيكون الجواب هو 1300.

و26 ضرب 3 تساوي مضاعف 26 زائد 26، وتساوي 52 + 26 وتساوي 78.

والجواب النهائي هو 1300 ناقص 78 تساوي 1222.

وباستخدام المعادلات:

$26 \times 47 = 26 \times (50-3)$

$26 \times 50 = 10 \times (26\times5) = 10 \times (130) = 1300$

$26\times3 = 26\times2 + 26 = 52+26 = 78.$

إذن: $26\times47 = 1300 - 78 = 1222$

الأسلوب الثالث:

26 ضرب 47 تساوي 26 ضرب (7 + 40) وتساوي (26 ضرب 7) زائد (26 ضرب 40).

26 ضرب 7 تساوي (26 ضرب 5) زائد مضاعف 26.

وتساوي 130 زائد 52 وتساوي 182.

و26 ضرب 40 تساوي مضاعف المضاعف ضرب 10 وتساوي 104 ضرب 10 وتساوي 1040. ويكون الجواب هو 182 زائد 1040 وتساوي 1222.

وهناك أكثر من أسلوب نستطيع فيه إيجاد الجواب، وهذا هو السبب في تسمية هذه الطريقة بـ "المناورة"، حيث إن الشخص يبحث عن أسهل الأساليب لمعرفة الجواب. وبالطبع فإن الأسلوب الثاني في الحل هو الأسهل في المسألة السابقة.

الفصل الخامس – عمليات القسمة

قد يكون مستغربا أن عمليات القسمة هي أسهل من عمليات الضرب وذلك باستخدام طريقة التضاعف التالية شرحها.

◄ **طريقة التضاعف في القسمة**

أوجد الناتج لـ 7823 تقسيم 114.

الحل:

لنقل أن ص تساوي 114.

انتبه هنا الآن ..... نحن نستطيع أن نجد 2ص (مضاعف ص) وذلك بشكل ذهني وسريع جدا: 4 و4 = 8، 1 و1 = 2، 1 و1 = 2.

إذن 2ص = 228.

ومن المناسب جدا للمبتدئين أن يقوموا بقسمة النتيجة على 2 وذلك للتحقق من الجواب (والذي يجب أن يكون 114). والقسمة على 2 سهلة جدا ويمكن عملها ذهنيا وبشكل سريع، وهو أمر سيتم التعرض له في نهاية هذا الفصل.

وبعد إيجاد 2ص فنحن نستطيع وبشكل سهل جدا إيجاد 4ص (مضاعف 2ص) والذي هو التالي: 8 و 8 = 6 والباقي 1، 2 و2 و1 =5، 2 و 2 = 4.

إذن 4ص = 456.

وكذلك من السهل جدا التأكد من الجواب بقسمة النتيجة على 2:

4 على 2 = 2، 5 على 2 = 2 والباقي 1، 16 على 2 = 8. والجواب هو 228 وهذا تأكيد على صحة 4ص.

الآن .... في طريقة التضاعف فإننا بحاجة فقط إلى 2ص و4ص حيث إن 20ص جوابها سهل جدا وذلك بإضافة صفر على يمين 2ص (أي أن 20ص = 2280). وكذلك 40ص جوابها سهل وذلك بإضافة صفر على يمين 4ص. وكذلك 100ص و200ص و400ص فإن جوابهم هو إضافة الأصفار على يمين العدد.

المطلوب الآن هو إيجاد النتيجة لقسمة 7823 على 114

ليكن ص = 114، 2ص = 228، 4ص = 456

وحل المسألة هو التالي:

7823 -
4560 ..... 40ص
3263 -
2280 ..... 20ص
983 -
456 ..... 4ص
527 -
456 ..... 4ص
71

والجواب هو: $40 + 20 + 4 + 4 + \frac{71}{114} = 68\frac{71}{114}$

دعونا نشرح ما سبق:

لنبدأ بقول التالي: ما أقرب عدد متوفر من ص و2ص و 4ص (وعشراتهم) للعدد 7823؟

ومن النظر فإننا نستطيع الانتباه وبسرعة إلى أن أقرب عدد متوفر لدينا (أي من ص و2ص و4ص وأصفارهم) للعدد 7823 هو 40ص وتساوي 4560.

ونقوم بطرح 4560 من 7823 ويكون الجواب هو 3263:
أي أن 7823 – 4560 = 3263.

ثم نقول: ما أقرب عدد متوفر لـ 3263؟

ومن النظر إلى ص و2ص و4ص فإننا نجد وبسهولة أن أقرب عدد متوفر لدينا هو 20ص وهو 2280.

ونقوم بطرح 2280 من 3263 ويكون الجواب هو 983:
أي أن 3263 – 2280 = 983.

ثم نقول: ما أقرب عدد متوفر للعدد 983؟
ومن النظر نجد أن أقرب عدد متوفر هو 4ص وهو 456.
ونقوم بطرح 456 من 983 ويكون الجواب هو 527:
أي أن 983 – 456 = 527.

ثم نقول: ما أقرب عدد متوفر للعدد 527؟
ومن النظر نجد أن أقرب عدد متوفر هو 4ص وهو 456.
ونقوم بطرح 456 من 527 ويكون الجواب هو 71:
أي أن 527 – 456 = 71.

وعندها تكون المعادلة التالية مكافئة:

7823 = 40ص + 20ص + 4ص + 4ص + 71.

وهذا معناه أن:

$$7823 \div ص = 40 + 20 + 4 + 4 + \frac{71}{114}$$

والجواب النهائي هو: $68\frac{71}{114}$

وانتبه هنا أن هذه الطريقة في الحل أسهل بكثير من الطرق التقليدية (والمشروحة في الفصل السابع) فيما يتعلق بقسمة عدد كبير على عدد كبير.

مثال آخر:

أوجد الناتج من قسمة 8932 على 73.
الحل: ص = 73، 2ص = 146 ، 4ص = 292
وتكون عمليات الطرح كما التالي:

- 8932
  7300 ..... 100ص
  1632
- 1460 ..... 20ص
  172
- 146 ..... 2ص
  26

والجواب هو:

$$122\frac{26}{73} = \frac{26}{73} + 2 + 20 + 100$$

مثال آخر:

أوجد الناتج من قسمة 567854 على 345.

الحل: ص = 345

2ص = 690

4ص = 1380

567854

- 345000 ..... 1000ص

222854

- 138000 ..... 400ص

84854

- 69000 ..... 200ص

15854

- 13800 ..... 40ص

2054

- 1380 ..... 4ص

674

- 345 ..... ص

329

والجواب هو:

$$1645\ \frac{329}{345} = \frac{329}{345} + 1 + 4 + 40 + 200 + 400 + 1000$$

◄ **طريقة المناورة في القسمة**

كانت المسائل السابقة لأرقام كبيرة نسبيا، ولكن من الممكن استخدام طريقة المناورة (وهي طريقة مختصرة للتضاعف) للأرقام البسيطة كما في الأمثلة التالية:

أوجد الناتج لـ 83 تقسيم 32.

الحل: $\frac{83}{32} = \frac{32+32+19}{32} = 1+1+\frac{19}{32} = 2\frac{19}{32}$

مثال آخر:

أوجد الناتج لـ 647 تقسيم 46.

الحل: ص=46، 2ص=92، 4ص=184

$$\frac{647}{46} = \frac{460+187}{46} = 10 + \frac{187}{46} = 10 + \frac{184+3}{46}$$

$$= 10 + 4 + \frac{3}{46} = 14\frac{3}{46}$$

انتبه إلى أننا استخدمنا الجمع في حل المسائل السابقة ولكن بالإمكان استخدام الطرح:

مثال:

أوجد الناتج لـ 64 تقسيم 7.

الحل: $\frac{64}{7} = \frac{6-70}{7} = 10 - \frac{6}{7} = 9\frac{1}{7}$

مثال:

أوجد الناتج لـ 80 تقسيم 45.

الحل: $\frac{80}{45} = \frac{10-45+45}{45} = 2 - \frac{10}{45} = 1\frac{25}{45}$

◄ **طريقة القسمة البسيطة:**

أوجد الناتج لـ 2368 تقسيم 7 باستخدام القسمة البسيطة.

الحل:

نضع الشكل التالي:

7	2	3	6	8	

- ونقول 2 تقسيم 7 تساوي صفر والباقي 2.
- ثم ننتقل إلى الخانة المجاورة إلى اليمين ونتذكر أن العدد إذا انتقل من خانة إلى خانة مجاورة إلى اليمين فإنه ينقلب إلى عشرات. وبالتالي إذا انتقل 2 من الخانة إلى خانة مجاورة إلى اليمين فإنه يصبح 20. ونقول 3 + 20 تساوي 23.

	0				
7	2	3	6	8	

- و23 تقسيم 7 = 3 والباقي 2. لماذا؟؟
- لأن 7 ضرب 3 تساوي 21 والفرق بين 23 و21 هو 2.

	0	3			
7	2	3	6	8	

- ننقل 2 الباقية إلى الخانة المجاورة فتصبح 20 ونضيفها إلى الخانة فيصبح العدد هو 26. ونقول 26 تقسيم 7 تساوي 3 والباقي 5.

	0	3	3		
7	2	3	6	8	

- ننقل 5 إلى الخانة المجاورة فتصبح 50 ونجمعها مع الخانة فتصبح 58. ونقول 58 تقسيم 7 تساوي 8 والباقي 2.

	0	3	3	8	
7	2	3	6	8	

- ويكون الجواب النهائي هو: $338\frac{2}{7}$

وهذه الطريقة سريعة ومناسبة لقسمة الأعداد على عدد أقل من عشرة. وفي الواقع فإن القسمة البسيطة سهلة جدا لقسمة أي عدد على 2. وفي أول هذا الفصل تحدثنا أنه من الأفضل للمبتدئ إذا ضاعف عدد أن يقوم (في سبيل التحقق) بقسمة العدد الجديد على 2 ليتأكد من صحة جوابه.

لنضع مثالا على ذلك:

ضاعف العدد 4567843 ثم اقسم الجواب على 2 للتحقق من صحته.

الحل: مضاعف العدد 4567843 هو 9135686.

دعونا الآن نقسم العدد 9135686 على 2 باستخدام القسمة البسيطة:

- نقول: 9 على 2 هو 4 والباقي 1 يزاح إلى الخانة اليمين فتصبح عشرة.
- عشرة من الخانة المجاورة + 1 تساوي 11. 11 على 2 هو 5 والباقي 1.

- 13 على 2 هو 6 والباقي 1.
- 15 على 2 هو 7 والباقي 1.
- 16 على 2 هو 8.
- 8 على 2 هو 4.
- 6 على 2 هو 3.

والجواب النهائي هو: 4567843 والذي هو مطابق للعدد الأصلي.

وبالطبع فإن الخطوات السابقة كانت مُفَصَّلة للشرح، ولكن الدماغ عندما يقوم بهذه الخطوات فإنه يقوم بعمليات قفز. وربما تكون الخطوات التالية هي الأقرب لعمليات الدماغ:

- 9 على 2: 4 و1.
- 13 على 2: 6 و1.
- 15 على 2: 7و1.
- 16 على 2: 8.
- 8 على 2: 4.
- 6 على 2: 3.
- 467843.

النقطة هنا أن قسمة العدد على 2 هي عملية في غاية السهولة بالضبط كمضاعفة العدد نفسه.

الفصل السادس – الكسور

لنقل أننا نريد أن نجد الكسر العشري لـ 27 تقسيم 49. فماذا نفعل؟؟

ما المقصود بالكسر العشري؟؟

المقصود هو أن نجد الجواب ضمن الترتيب التالي:

$$\text{ك} = \frac{\quad}{10} + \frac{\quad}{100} + \frac{\quad}{1000} + \dots$$

مثال: أوجد الكسر العشري لـ 1 تقسيم 4.

الجواب هو:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

وقد جرى العرف أن نعبر عن المعادلة السابقة بالفاصلة بعد الصفر (والتي هي باللغة الإنجليزية نقطة صغيرة بعد الصفر):

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 0.25$$

ولكن السؤال هنا .... كيف وجدنا الجواب؟

الطريقة سهلة:

أوجد الكسر العشري لـ 27 تقسيم 49.

المقام هو 49 ولنقل إنه يساوي ص.

وعليه فإن التالي سهل الوصول إليه:

ص=49

2ص=98

4ص=196

الآن لنقل كذلك أن:

$$ك = \frac{27}{49} = \frac{1}{10} \times \frac{270}{49}$$

الآن ... ما حاصل قسمة 270 على 49؟؟

الجواب سهل باستخدام طريقة التضاعف:

270 ناقص 196 تساوي 74 ..... (وهذا 4ص).
74 ناقص 49 تساوي 25 ..... (وهذا ص).
والجواب هو 5 و(25 تقسيم 49).

ويكون الجواب هو:

$$ك = (5 + \frac{25}{49}) \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{25}{49\times10}$$

لنفترض الآن التالي:

$$ط = \frac{25}{49\times10} = \frac{250}{49} \times \frac{1}{100}$$

الآن ... ما نتيجة 250 تقسيم 49؟

الجواب سهل باستخدام طريقة التضاعف كذلك:

250 ناقص 196 تساوي 54 ..... (وهذا 4ص).
54 ناقص 49 تساوي 5 ..... (وهذا ص).
والجواب هو 5 و(5 تقسيم 49).

ويكون الجواب هو:

$$ط = (5 + \frac{5}{49}) \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{5}{100} + \frac{5}{49\times100}$$

ولكن ك = $\frac{5}{10}$ + ط

إذن ك = $\frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{49\times100}$

وهنا من الضروري التعرض لمفهوم "نسبة الخطأ".

لماذا؟؟؟؟

لأننا عندما نقوم بمحاولة إيجاد الكسور أو الجذور فإننا نصل لعمليات حسابية لا نهاية لها وعلينا أن نتوقف في مرحلة ما. وهذه المرحلة هي المرحلة المتفق عليها أن نسبة الخطأ فيها مقبولة.

دعونا نضرب المثل:

في الآلات الحاسبة فإن هناك عدد خانات محدود للعدد، وعلى الأغلب 9 خانات. الآن لنفترض أنك ضربت العدد 987,654,321 بـ 987,654,321 في الآلة الحاسبة فإن الجواب الدقيق سيكون ذا 18 خانة كالتالي: 975,461,057,789,971,041

ولكن الجواب في الآلة الحاسبة قد يكون كالتالي:9.75461057 E17

انتبه هنا إلى أن E17 معناها "10 للقوة 17". أي أن:

975,461,057,000,000,000 = 9.75461057 E17

أي أن الفرق بين الجواب الدقيق وجواب الآلة الحاسبة هو:

975,461,057,789,971,041 - 975,461,057,000,000,000 = 789,971,041

السؤال الآن ... ما نسبة الخطأ بين الجواب الدقيق وجواب الآلة الحاسبة؟؟

نسبة الخطأ هي (الجواب الدقيق ناقص الجواب المُقَدَّم) تقسيم الجواب الدقيق.

أي أن نسبة الخطأ تساوي:

789,971,041 تقسيم 975,461,057,789,971,041

وتساوي:8 E-10، أي تساوي 8 تقسيم 10 مليار.

ونسبة الخطأ السابقة هي مشابهة تماما للفرق بين عشرة مليارات درهم وعشرة مليارات وثمانية دراهم، وهي نسبة خطأ ضئيلة جدا.

الآن .... كيف نُسْقِط مفهوم نسبة الخطأ على عمليات الكسور؟؟

لنقل في المسألة السابقة (27 تقسيم 49) أننا نريد نسبة خطأ لا تزيد عن 1 تقسيم 100. أي أن نسبة الخطأ المطلوبة هي 0.01، وفي هذه الحالة فإن المسألة السابقة تكون منتهية كالتالي:

$$\text{ك} = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{49\times100}$$

والحد الأخير ($\frac{5}{49\times100}$) هو أقل بكثير من نسبة الخطأ.

وبالتالي فإن جواب المسألة السابقة (ضمن نسبة الخطأ المطلوبة) هو:

$$\text{ك} = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} = 0.55$$

انتبه هنا أنَّه إذا كانت نسبة الخطأ لا تزيد عن (1 تقسيم 100) فهذا معناه أن الجواب يجب أن يكون ضمن خانتين كسريتين كما هو حاصل في الجواب السابق (0.55).

الخطوات السابقة كانت للشرح، وبالتأكيد فإن خطوات الدماغ في الحل ستكون أسرع بكثير.

مثال آخر:

أوجد الكسر العشري لـ 47 تقسيم 212 وذلك لأقرب ثلاث خانات كسرية.

الحل:

ص = 212

2ص = 424،

4ص = 848

الآن .... 47 تقسيم 212:

$\underline{47}0 - 424 = 46$ ..... ($\frac{2}{10}$)ص

$\underline{46}0 - 424 = 36$ ..... ($\frac{2}{100}$)ص

$\underline{36}0 - 212 = 148$ ..... ($\frac{1}{1000}$)ص

ويكون الجواب هو: 0.221 ضمن نسبة الخطأ المطلوبة.

مثال آخر:

أوجد الناتج لقسمة العدد 9563 على 213 ولأقرب كسرين عشريين.

الحل: ص = 213، 2ص = 426، 4ص = 852

9563

- 8520 .....40ص

1043

- 852 ..... 4ص

191 ..... **بداية العمليات الكسرية**

1910 ..... الخانة الكسرية الأولى

- 852 ..... $\frac{4}{10}$ ص

1048

- 852 ..... $\frac{4}{10}$ ص

196

1960 ..... الخانة الكسرية الثانية

- 852 ..... $\frac{4}{100}$ ص

1108

- 852 ..... $\frac{4}{100}$ ص

258

- 213 ..... $\frac{1}{100}$ ص

45

ويكون الجواب لكسرين عشريين هو:

$$44\frac{191}{213} = \frac{191}{213} + 4 + 40$$

$$= 0.01 + 0.04 + 0.04 + 0.4 + 0.4 + 44$$

$$= 44.89$$

مثال آخر:

أوجد الناتج من قسمة 961 على 78 ولأقرب أربعة كسور عشرية.

الحل: ص = 78، 2ص = 156، 4ص = 312

961
- 780 ..... 10ص
181
- 156 ..... 2ص
25 ..... **بداية العمليات الكسرية**
250 ..... الخانة الكسرية الأولى
- 156 ..... 0.2ص
94
- 78 ..... 0.1ص
16
160 ..... الخانة الكسرية الثانية
- 156 ..... 0.2ص
4
40 ..... الخانة الكسرية الثالثة
400 ..... الخانة الكسرية الرابعة
- 312 ..... 0.0004ص
88
- 78 ..... 0.0001ص
10

ويكون الجواب لأقرب أربعة كسور عشرية هو:

$$10 + 2 + \frac{25}{78} = 12\frac{25}{78}$$

$$= 12 + 0.2 + 0.1 + 0.02 + 0.0004 + 0.0001$$

$$= 12.3205$$

الفصل السابع – العمليات التقليدية في الضرب والقسمة

من المفيد هنا عرض الطريقة التقليدية في عمليات الضرب والقسمة كي يكون الكتاب شاملا قدر الإمكان. وسيتم أولا شرح الطريقة التقليدية في الضرب ثم الطريقة التقليدية في القسمة.

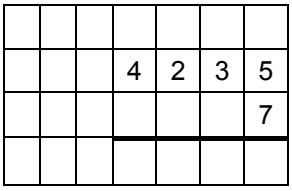
◄ الطريقة التقليدية في الضرب

لنضرب 4235 في 7، فكيف تتم عملية الضرب؟؟

نقول التالي: 7(ضرب 5) + (7 ضرب 30) + (7 ضرب 200)+ (7 ضرب 4000).

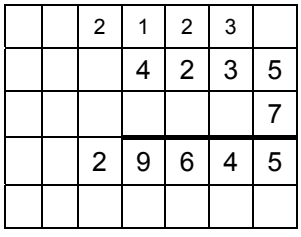
ولكن العملية السابقة أسهل إذا استخدمنا الصفوف العامودية والنظام العشري في الجمع فنقول:

- 7 ضرب 5 تساوي 35 ويتم كتابته بـ 5 والباقي 3.



- ثم ننتقل إلى الخانة التالية (خانة العشرات) ونقول 7 ضرب 3 تساوي 21، مع الباقي السابق (3) تساوي 24 والجواب هو 4 والباقي 2.

- ثم ننتقل إلى الخانة التالية (خانة المئات) ونقول 7 ضرب 2 تساوي 14، مع الباقي السابق (2) تساوي 16. ويكون الجواب 6 والباقي 1.



- ثم ننتقل إلى خانة الآلاف ونقول 7 ضرب 4 والجواب 28، مع الباقي السابق (1) تساوي 29 والجواب 9 والباقي 2.

- ثم ننتقل إلى خانة التالية (خانة العشرة آلاف) ونقول هناك باقي فقط وهو 2. وإذا أردنا التفصيل الكامل فنحن نقول: إن 7 ضرب صفر والجواب صفر مع الباقي السابق (2) فيكون الجواب هو 2.

- ويكون الجواب النهائي هو: 29645

الذي حدث هو أننا بانتقالنا من خانة إلى أخرى لم نعد نضرب بعشرة ومائة وألف وعشرة آلاف حيث إن الانتقال نفسه قد ضمن هذه العملية تلقائيا.

مثال آخر:

لنضرب 45 في 37.

			4	5
			3	7

الجواب هو: 7 ضرب 5 + 7 ضرب 40 + 30 ضرب 5 + 30 ضرب 40.

$$45 \times 37 = (30+7) \times (40+5)$$

$$= 7\times5 + 40\times7 + 5\times30 + 40\times30$$

وبالطبع فإنه من الممكن تسهيل العملية السابقة باستخدام الصفوف العامودية والنظام العشري في الجمع ونقول:

- 7 ضرب 5 تساوي 35، ويتم كتابتها بـ 5 والباقي 3.
- ثم ننتقل إلى الخانة التالية (خانة العشرات) ونقول: 7 ضرب 4 تساوي 28، مع الباقي السابق (3) يكون الجواب 31، ويتم كتابتها بـ 1 والباقي 3.

			4	5
			3	7
		3	1	5

- ننتقل إلى الخانة التالية والتي هي صفر ويكون الجواب هو الباقي السابق والذي هو 3.
- وهنا يكون قيمة الصف الأول هو 315.
- الآن ننتقل إلى الصف التالي والخاص بـ 30. فالصف الأول كان حاصل ضرب 7 في 45. وأما الصف الثاني فهو حاصل ضرب 30 في 45. والجواب هو حاصل ضرب 3 في 45 ضرب 10:

			4	5
			3	7
		3	1	5
	1	3	5	0
	1	6	6	5

$$45 \times 30 = 10 \times (45\times3)$$

وهذا معناه أن الجواب هو حاصل ضرب 3 في 45 وإضافة صفر يمين العدد. وهذا هو السبب أننا عندما ننتقل من صف إلى الصف الذي يليه نقوم بوضع صفر على يمين العدد.

- ثم بعدها نقوم في الثاني كما فعلنا في الصف الأول:
- 3 ضرب 5 تساوي 15 ويتم كتابتها 5 والباقي 1.

- ثم ننتقل إلى الخانة التالية ونقول 3 ضرب 4 تساوي 12، ومع الباقي السابق يكون الجواب 13. وللاختصار فنحن نقوم بكتابتها 13. ولكن إذا أردنا التفصيل نقول 3 والباقي 1 ثم في الخطوة التالية نكتب الباقي السابق والذي هو 1.

ثم نجمع الصف الأول والثاني لنأخذ الجواب.

وإذا انتبه القارئ إلى هذه الطريقة التقليدية فسيجدها سهلة في ضرب أعداد صغيرة (خانتان في خانتين على الأكثر) كضرب 35 في 91. ولكن إذا زادت الخانات فإن طريقة التضاعف (المشروحة في الفصل الرابع) هي الأسهل كضرب 3445678 في 58878.

◄ **الطريقة التقليدية في القسمة**

7	2	3	6	8	

لنجد الناتج لـ 2368 تقسيم 7. ولنضع الشكل المجاور:

- ونقول: 2 تقسيم 7 تساوي صفراً. ونضع الصفر فوق 2 كما في الشكل التالي، ثم نقول صفر ضرب 7 تساوي صفر ونضع الصفر تحت 2 كما في نفس الشكل. ثم نطرح 2 من الصفر ويكون الجواب هو 2.

	0				
7	2	3	6	8	
	0				
	2				

- ثم ننزل الـ 3 بجوار الـ 2 ونقول 23 تقسيم 7. وأقرب جواب لذلك هو 3، ونضعه في خانة الجواب. ثم نضرب 3 في 7 فيكون الجواب هو 21. ثم نطرح 23 من 21 فيكون 2.

	0	3			
7	2	3	6	8	
	0				
	2	3			
	2	1			
	0	2			

- ثم نضع الـ 6 بجوار الـ 2 الأخيرة فيكون 26. ونقول 26 تقسيم 7. ويكون أقرب جواب له هو 3، ونضعه في خانة الجواب. ثم نقول 3 ضرب 7 تساوي 21. ونضعها أسفل 26. ونطرح 26 من 21 فيكون الجواب هو 5.

	0	3	3		
7	2	3	6	8	
	0				
	2	3			
	2	1			
	0	2	6		
		2	1		
			5		

- ثم نضع 8 بجوار الـ 5. ونقول 58 تقسيم 7. وأقرب جواب هو 8 ونضعها في خانة الجواب. ثم نقول 8 ضرب 7 تساوي 56 ونضعها أسفل 58. ونطرح 58 من 56 فيكون الجواب هو 2.

- وتنتهي عملية القسمة بالجواب: $338\frac{2}{7}$

	0	3	3	8	
7	2	3	6	8	
	0				
	2	3			
	2	1			
	0	2	6		
		2	1		
			5	8	
			5	6	
			0	2	

مثال آخر:

أوجد الناتج لـ 356 تقسيم 26.

الحل:

نضع الشكل التالي:

2	6	3	5	6	7	

- ونقول 3 تقسيم 26 تساوي صفراً. ونضع الصفر في خانة الجواب. ونضرب الصفر في 26 ويكون الجواب صفراً، ونضعه أسفل 3. ونطرح صفر من 3 ويكون الجواب 3، كما في الشكل. وننزل الخانة التالية (5) بجوار الـ 3.

		0				
2	6	3	5	6	7	
		0				
		3	5			

- ونقول الآن: 35 تقسيم 26. وأقرب جواب هو 1، ونضعه في خانة الجواب. ثم نضرب 1 في 26 ويكون 26 ونضعها أسفل 35. ونطرح من 35 العدد 26 ويكون 9. ثم ننزل العدد 6 بجواره.

		0	1			
2	6	3	5	6	7	
		0				
		3	5			
		2	6			
		0	9	6		

- ونقول 96 تقسيم 26. وأقرب عدد لذلك هو 3، ونضعه في خانة الجواب. ثم نضرب 3 في 26 فيكون 78 ونضعها أسفل 96. ثم نطرح من 96 العدد 78 فيكون 18. ثم ننزل العدد 7 بجوار 18.

		0	1	3		
2	6	3	5	6	7	
		0				
		3	5			
		2	6			
		0	9	6		
			7	8		
			1	8	7	

- ثم نقسم العدد 187 على 26. وأقرب جواب له هو 7، ونضعها في خانة الجواب. ثم نضرب 7 في 26 ويكون الجواب هو 182، ونضعها أسفل 187. ثم نطرح من 187 العدد 182 ويكون الجواب هو 5.

		0	1	3	7	
2	6	3	5	6	7	
		0				
		3	5			
		2	6			
		0	9	6		
			7	8		
			1	8	7	
			1	8	2	
					5	

- وتنتهي عملية القسمة. ويكون الجواب النهائي هو:

$$137\frac{5}{26}$$

مؤلفات سابقة للمؤلف

الوعد القريب: زوال الكيان التاسع لبني إسرائيل كما زالت كياناته السابقة (2102)، مصر: عالم الكتب للنشر والتوزيع.

الجن .... ما نتوهمه لهم وما يمكن استنتاجه عنهم (2012)، مصر: عالم الكتب للنشر والتوزيع.

الأسرار في الإبداع: الإبداع والعبقرية ليستا بحاجة إلى ذكاء خارق، وإنَّما بحاجة فقط إلى صبرٍ في التَّفكير (2012)، مصر: عالم الكتب للنشر والتوزيع.

العبرة الكبرى: النقمة التي تحل على أي شعب (أو أُمَّةٍ بِمَنْ فيهم العرب والمسلمين) يَرَوْنَ أنفسهم أنهم أفضل الشعوب وأذكى الشعوب وأشرف الشعوب وأَنَّ الكون كله يدور حولهم وأنه يحق لهم ما لا يحق لغيرهم (2012)، مصر: عالم الكتب للنشر والتوزيع.

النهضة والذكاء الجماعي: أفكار منهجية في البحث والتحليل والإدارة تتعلق بالصفات الأساسية لنهضة الأمم (2012) مصر: مكتبة الآداب.

سياسات الأمم ولعبة الأقدار: نظرات منهجية في العمل الإستراتيجي والتحليل السياسي يتضمن وصفا للقوى الديناميكية في إيران وتركيا وحزب الله وإنجلترا وأمريكا. كما يتضمن ملحقا إضافيا عن انتفاضات تونس ومصر (2011) مصر: دار الفكر العربي.

بذور الهلاك: التربية التي زرعت فينا منذ 1379 سنة (2000) لبنان: دار البيارق.

فلسفات الحكم والدستور (1999) لبنان: دار النهضة الإسلامية.

ملاحظة: بعض الكتب السابقة يمكن تنزيلها بصيغة الـ pdf من العنوان التالي:
omr-mhmd.yolasite.com

الملحق - التمارين والأجوبة

يتكون هذا الملحق من التالي:

A ..... تمارين الجمع الطويل.

B ..... تمارين القسمة.

C ..... تمارين الضرب البسيط.

D ..... تمارين الضرب الطويل.

E ..... أجوبة التمارين.

الآن ... ليس الهدف هو تنفيذ التمارين في وقت قصير وإنما الهدف هو ضمان التكرار. ولا يوجد ضرورة لتنفيذ التمارين بالترتيب وإنما تستطيع اختيار التمارين بشكل عشوائي.

والمقترح هنا هو عمل ثلاثة تمارين في اليوم:

الجمع الطويل، والقسمة (والتي هي عمليات طرح)، وعمليات الضرب بالمناورة. وبين الحين والآخر القيام بعمل تمرين الضرب الطويل والذي هو في الحقيقة عمليات جمع.

A- تمارين الجمع الطويل

اجمع الأعداد التالية بشكل عقلي . القلم هنا يتم استخدامه فقط لتسجيل الباقي والجواب.

A.1

			5	5	2	3	7	0	7	8	7	0	4	8	7
							9	8	0	9	3	5	7	0	5
						2	6	6	2	2	8	8	5	9	9
								6	9	2	5	1	9	6	0
					1	1	7	2	0	2	3	3	9	9	4
								1	1	6	4	4	7	3	6
								1	5	0	4	9	2	7	3
								9	6	6	4	0	5	6	9
		3	5	9	4	6	5	5	4	3	4	2	0	2	9

A.2

					7	4	3	7	5	5	4	3	7	5	6
	3	8	8	5	6	5	3	7	6	6	1	6	8	5	3
	1	1	5	4	6	8	3	9	3	5	7	5	9	6	2
		1	6	3	4	5	3	3	4	2	0	4	4	1	1
			0	5	0	1	9	1	3	5	6	9	7	7	8
										2	7	0	5	1	9
						8	2	4	3	4	8	4	4	5	6
							5	8	3	2	7	8	9	5	3
	7	5	1	4	3	8	8	2	0	6	1	8	3	0	8

A.3

							4	1	4	2	6	5	1	9	6
					3	1	7	4	7	5	8	0	2	0	1
							1	0	5	6	5	8	0	1	6
						3	1	7	9	5	0	7	4	4	4
								3	0	5	1	9	0	4	2
		7	2	6	2	0	0	3	7	2	2	4	2	3	0
						2	8	5	7	9	3	5	0	6	4
	1	9	6	3	1	4	2	9	1	0	3	5	9	5	4
		8	6	7	9	3	4	4	6	1	4	5	8	5	4

A.4

	9	2	2	2	3	7	9	8	9	0	9	7	8	8	2
								2	0	3	3	1	9	6	9
	5	7	7	8	6	3	6	8	8	0	5	3	4	6	2
							4	3	2	1	0	0	5	9	4
							0	8	6	9	5	6	5	9	8
		9	3	2	1	2	5	8	7	0	9	9	3	6	8
				1	5	8	6	3	6	1	7	5	5	1	7
					8	7	5	6	3	2	5	6	4	7	3
		0	3	6	4	5	4	1	9	9	3	3	2	6	5

A.5

					2	6	4	6	8	3	3	2	1	5	2
					3	8	4	1	6	7	6	7	1	8	2
	7	0	7	3	4	1	1	1	0	7	5	5	2	4	7
							9	7	0	6	7	0	4	4	2
	8	6	4	7	2	3	4	9	1	6	3	1	1	0	4
	5	4	9	2	3	3	2	5	1	5	9	5	9	6	4
				3	7	7	4	1	2	3	7	0	5	7	8
	8	6	9	8	4	1	9	7	6	4	0	1	1	5	4
									2	6	8	4	1	8	3

A.6

		5	0	6	4	4	3	0	0	2	4	3	3	9	5
					3	7	9	2	1	3	2	9	1	7	8
				4	3	6	4	5	8	7	7	2	0	2	7
					8	6	0	4	6	6	8	1	4	3	0
								8	6	2	8	5	6	4	6
									5	8	2	6	1	0	0
										3	6	5	6	6	9
					4	6	5	9	3	6	0	7	3	0	3
					6	9	9	8	3	4	5	0	1	8	7

A.7

							7	2	4	2	8	6	3	3	8
					9	5	3	8	2	2	1	3	0	7	8
								7	4	8	7	4	0	4	3
			3	7	1	5	9	2	9	1	9	6	5	9	5
								8	0	4	7	2	3	3	5
								5	2	0	8	1	6	9	2
	8	4	4	7	8	3	1	3	4	1	6	0	2	6	5
									9	4	0	4	2	7	8
		1	1	0	1	3	1	9	8	5	7	1	2	0	8

A.8

				8	8	8	0	8	9	2	5	9	6	5	1
						5	8	3	7	1	0	5	0	2	6
		6	2	5	3	3	2	3	7	3	7	1	5	4	9
							1	9	6	7	9	9	4	7	9
					2	3	0	1	1	8	2	7	1	6	4
				0	3	2	1	9	4	2	6	3	8	0	0
				0	6	0	9	0	2	4	2	1	4	9	1
									9	1	1	9	5	0	6
										7	8	7	6	3	7

A.9

			7	3	4	5	8	5	2	2	3	5	3	5	4
					1	5	2	9	9	9	8	4	8	9	2
				3	3	6	1	1	2	3	5	3	2	8	3
						8	4	7	6	4	9	6	5	2	5
			4	9	2	6	8	2	3	0	2	9	7	5	6
								5	7	8	0	5	4	0	4
				4	4	9	9	5	5	6	0	1	2	0	1
						5	5	7	0	4	0	3	6	5	5
							9	7	5	4	7	1	0	2	7

A.10

					9	2	7	8	4	4	8	5	3	0	1
								3	9	5	7	8	7	6	1
									9	7	6	7	2	1	9
			2	7	1	2	3	9	0	6	7	5	8	0	0
								1	7	8	2	4	2	3	8
							1	9	9	5	0	3	7	6	4
								9	6	0	1	1	3	8	8
									2	3	1	4	1	3	4
										8	9	5	4	6	0

A.11

	3	6	7	0	7	4	2	6	9	9	6	0	6	9	0
	5	2	5	8	0	0	5	3	4	5	7	4	3	0	4
			5	6	8	4	7	7	6	7	1	7	0	2	9
		2	1	2	9	2	2	7	6	7	7	3	8	7	8
								3	5	3	2	5	6	1	0
				8	6	4	1	4	9	7	3	4	5	6	0
				8	3	1	4	7	3	4	7	4	7	5	1
								1	9	2	6	3	8	3	7
							6	4	4	5	0	3	1	3	7

A.12

		6	8	3	8	1	8	9	5	3	5	6	5	0	9
				9	0	3	8	1	3	1	0	9	3	5	1
								0	1	6	9	1	1	9	6
								6	8	4	1	5	6	1	2
				1	2	2	7	8	6	6	2	7	8	0	8
						0	3	8	7	4	6	9	2	4	4
										3	2	5	9	3	8
						6	2	2	9	8	8	6	9	4	3
									3	5	2	8	9	8	4

A.13

	8	5	6	1	9	3	6	5	7	7	6	7	2	5	5
					2	4	3	9	5	5	4	0	3	1	6
									1	3	0	6	7	4	4
							7	2	0	8	0	4	7	7	8
								4	8	8	4	4	3	2	8
					5	6	0	7	2	0	2	9	3	6	3
							3	2	2	4	6	2	6	5	6
										8	1	2	3	5	2
		5	3	0	2	1	6	9	3	2	8	1	5	6	6

A.14

				1	7	7	0	5	0	1	2	6	4	1	4
							8	7	0	2	2	1	8	9	8
		3	5	9	7	4	5	1	5	9	8	1	7	2	2
			1	6	6	5	5	7	5	3	6	0	4	5	2
	3	3	9	5	7	7	5	5	8	6	9	4	9	6	7
			0	1	3	7	7	6	8	4	7	2	7	4	5
									5	7	8	1	7	1	0
						9	9	3	5	5	5	6	7	1	3
			2	6	9	0	4	5	2	6	4	1	5	8	6

A.15

				8	0	3	8	2	6	3	8	4	8	2	7
		2	9	9	8	5	6	4	1	6	6	8	3	0	5
										3	4	2	9	0	6
				5	0	7	3	9	2	3	3	3	2	5	7
								5	5	9	9	2	8	7	4
				4	4	1	9	1	5	6	1	6	7	7	4
										4	5	0	4	1	1
							9	6	2	4	4	0	4	4	9
								1	5	3	5	3	2	0	6

A.16

						1	9	0	0	4	6	5	4	4	8
		3	5	9	0	3	9	8	1	9	4	7	4	9	1
			0	5	7	3	5	2	8	3	3	7	6	6	5
						8	0	5	1	6	1	0	6	2	1
		1	4	8	1	5	7	7	0	9	0	2	4	4	6
			9	8	1	2	9	2	9	4	6	9	1	4	2
				9	3	2	1	3	7	9	6	9	4	5	2
										7	8	4	3	7	8
									0	5	4	3	4	7	1	5

A.17

							5	8	4	5	3	0	1	1	1
			2	1	0	6	8	5	8	9	5	0	6	3	2
				4	3	2	8	1	4	6	5	7	1	3	0
			9	2	2	9	1	4	3	3	9	5	5	1	8
										7	7	2	9	4	7
							2	6	5	4	6	7	0	1	1
										5	9	2	3	8	4
								8	0	1	9	8	8	9	2
				6	9	4	0	8	1	2	6	3	5	9	5

A.18

							7	1	5	9	9	6	8	3	3
				7	4	3	4	3	8	0	2	6	6	0	0
			7	8	3	0	1	6	2	8	4	4	3	8	0
				8	0	8	0	5	2	0	1	9	2	6	2
									4	3	3	7	2	5	1
						8	8	7	8	9	9	6	3	9	9
									9	8	0	8	3	5	5
					9	6	9	4	1	2	3	2	8	8	6
			0	2	3	8	0	5	8	5	7	3	3	0	9

A.19

	7	4	7	5	4	0	0	3	4	3	6	1	4	1	9
								4	8	7	2	7	8	9	2
	9	5	8	5	4	8	7	8	1	7	6	9	8	7	7
						7	5	1	3	4	8	8	3	9	5
	4	7	3	0	8	5	8	8	7	9	0	8	2	2	0
	9	2	5	3	2	2	1	6	5	8	0	2	6	4	2
		3	9	3	7	8	6	3	5	6	5	0	8	0	1
							4	4	8	0	8	2	0	7	0
									6	2	8	2	2	5	6

A.20

								1	9	4	0	7	1	4	
				9	9	7	5	2	3	3	2	3	6	7	4
						4	7	5	6	1	0	3	2	1	0
				5	4	4	1	4	6	6	0	8	7	5	5
	4	3	3	0	1	1	9	8	2	1	0	5	6	6	3
							8	0	4	5	6	8	1	3	
			4	7	0	0	9	8	2	1	9	2	8	2	7
								4	9	1	7	8	3	2	
			2	0	1	3	2	5	1	6	2	9	9	7	7

A.21

				1	9	3	3	0	8	4	4	9	2	5	0
		4	5	3	1	7	2	2	3	4	7	1	4	8	5
			2	0	6	5	6	3	6	1	9	3	8	1	4
									7	8	2	4	5	0	
				9	0	7	0	9	9	6	6	1	1	9	6
		1	1	2	0	3	9	2	7	8	0	8	8	2	1
				7	6	4	9	1	2	6	2	3	0	0	9
						4	4	8	4	7	3	3	2	2	0
			8	3	4	9	6	4	8	3	1	9	5	7	6

A.22

									6	8	9	9	0	7	
								2	9	5	8	1	8	7	
			2	3	0	9	3	2	3	1	4	0	9	9	0
								8	2	9	0	7	6	7	
			6	2	2	5	3	0	5	3	7	6	5	4	5
							2	4	2	4	3	8	4	1	
				1	0	8	8	6	2	2	0	0	0	3	4
	1	6	7	5	8	7	5	0	7	7	6	8	0	4	
					2	6	8	3	7	2	7	8	1	4	6

A.23

							9	3	3	2	7	8	1	9	6
		7	3	5	8	1	7	4	5	0	0	8	9	0	6
	1	3	4	9	1	8	6	2	0	9	4	6	0	0	9
								8	4	1	2	7	8	2	3
		8	4	5	1	9	2	0	3	6	3	6	7	7	1
										2	1	9	1	6	9
								2	7	7	3	1	5	1	2
		6	4	5	2	0	2	9	0	8	0	7	2	9	0
					4	8	4	8	8	0	5	5	7	4	9

A.24

					9	7	7	9	4	2	5	4	4	7	3
									6	9	3	9	3	6	3
									7	8	6	9	2	2	3
									8	0	4	9	5	6	6
		8	1	4	2	2	5	7	6	9	6	7	0	1	8
						2	7	4	3	9	5	0	8	9	5
								4	8	8	6	5	4	6	1
									9	8	0	2	2	3	2
		4	0	6	1	0	9	9	7	1	7	4	6	3	5

A.25

									6	6	7	4	9	8	1
				2	8	7	3	0	6	1	6	3	0	6	5
					8	9	2	1	7	8	3	8	7	3	5
							5	4	5	7	3	2	8	2	1
									2	1	5	9	3	2	6
								6	3	0	9	2	6	9	3
							4	7	2	8	7	4	1	1	2
	4	3	7	2	3	1	3	4	9	0	7	0	6	6	7
			1	9	3	0	2	6	1	8	1	4	9	4	9

A.26

					5	9	9	7	5	7	3	7	4	0	3
								0	0	3	0	3	8	2	9
					7	8	6	6	1	7	5	8	4	4	2
							7	8	7	0	0	4	2	1	2
				9	4	1	6	6	0	8	7	6	1	4	8
										8	5	7	0	8	5
		9	8	1	4	5	2	4	5	0	0	2	0	0	8
			5	2	6	2	5	6	9	2	6	5	0	0	6
										8	7	2	8	6	6

A.27

						7	7	2	1	6	9	7	5	3	2
			2	6	6	1	9	8	6	0	4	0	6	7	4
										5	6	8	3	2	6
							5	6	6	1	6	9	7	9	1
							7	2	9	9	8	9	1	9	1
			7	9	4	9	1	4	3	5	0	3	7	0	2
										8	2	7	9	7	4
				2	0	3	2	4	3	6	4	8	4	4	6
				9	0	5	0	6	1	4	4	9	5	7	2

A.28

	1	3	1	1	7	8	6	2	5	4	0	7	3	1	5
			8	5	4	6	4	1	2	5	2	2	2	1	5
				9	2	4	8	1	8	5	3	1	5	2	4
									7	3	1	4	2	1	9
									5	2	8	9	4	7	2
										1	2	5	7	4	2
		7	9	9	3	4	8	1	2	2	0	7	4	6	1
						6	5	6	3	8	6	4	3	1	4
				5	2	5	6	5	6	1	2	3	6	0	2

A.29

		8	3	8	5	2	8	4	9	0	9	8	2	2	4
				2	9	1	6	0	8	0	4	4	1	0	3
										9	9	5	0	6	7
							5	1	6	2	5	8	5	9	3
				1	7	7	8	8	6	2	4	5	0	1	9
								8	5	1	8	2	3	0	4
							6	3	9	7	0	3	3	5	2
	4	2	9	7	9	4	3	8	0	0	7	2	3	7	2
							2	4	9	6	8	4	3	8	5

A.30

								0	4	2	7	8	8	5	
				7	6	6	1	1	1	4	9	2	5	3	7
						2	7	1	6	3	1	1	0	7	
				1	2	0	7	9	1	6	4	6	6	7	0
									3	0	6	4	7	5	
				2	7	2	8	0	0	5	1	7	2	1	2
	9	9	1	6	0	6	7	4	5	9	3	4	2	8	9
		0	5	0	4	1	3	0	2	1	0	8	5	0	9
										5	6	5	0	2	4

A.31

							5	0	8	4	5	1	1	6	0
	9	8	8	9	3	8	3	4	8	8	6	4	1	6	1
										3	5	3	6	5	2
								4	4	3	9	3	3	9	2
								2	6	5	9	4	5	3	1
										8	4	4	3	0	9
					2	4	3	8	7	8	2	1	4	1	1
						8	6	7	0	2	5	9	7	1	6
				9	5	5	3	4	8	9	6	9	1	8	9

A.32

					7	9	8	4	1	7	7	4	3	9	3
			2	8	4	2	2	4	1	8	7	9	3	7	9
		4	8	8	2	1	9	1	9	7	2	8	3	4	3
										6	9	2	6	7	4
						4	6	4	1	4	3	7	2	0	8
				1	2	9	7	6	2	3	5	7	0	6	3
							8	0	1	2	7	6	7	7	8
			2	0	3	2	2	0	4	2	6	4	6	8	2
								9	1	4	9	3	1	0	9

A.33

							9	4	6	5	3	4	7	6	5
										6	8	3	4	9	5
						1	5	2	5	7	0	5	4	5	2
				3	6	8	3	2	1	8	3	5	2	3	8
							2	0	3	9	0	9	1	2	6
									6	5	2	1	6	1	1
										1	2	4	6	7	4
							7	9	4	1	7	1	1	6	2
		4	1	7	8	3	1	6	6	8	8	2	8	8	1

A.34

									7	2	9	2	8	2	
			3	7	9	8	1	8	3	8	1	0	5	0	5
								2	3	3	1	8	0	1	1
							8	4	9	4	3	5	8	7	0
										3	6	5	2	8	0
								0	2	8	9	5	6	5	5
							4	9	2	1	0	1	7	2	3
										8	1	9	9	4	9
			7	3	1	3	1	0	3	6	6	4	2	3	

A.35

										2	2	2	0	5	4
				4	4	0	5	5	9	4	2	9	3	4	9
			1	2	8	0	2	0	2	3	7	5	8	7	6
			9	2	3	5	9	9	7	3	1	5	0	2	3
	8	2	0	3	7	9	6	4	2	2	7	7	1	7	1
								4	3	8	6	6	8	3	3
		8	8	8	7	5	3	6	1	2	7	0	3	0	7
						7	4	4	7	7	5	3	0	5	4
							6	6	5	6	0	3	6	7	8

A.36

									6	1	7	1	5	7	
						0	2	3	9	4	3	7	6	6	
					1	4	5	5	5	9	2	7	0	1	
						5	0	9	5	3	6	0	5	2	
					4	0	0	8	6	7	2	7	3	7	
		5	7	1	1	8	0	2	0	1	7	1	6	5	6
				0	9	2	5	5	9	6	7	8	7	2	3
					6	4	8	1	2	3	1	2	5	0	
		6	6	2	4	6	2	9	2	6	1	1	4	4	6

A.37

				3	6	9	9	6	5	7	2	6	4	5	3
								4	8	3	0	6	6	7	4
										4	7	5	5	8	5
		3	1	1	7	1	2	0	4	3	6	8	5	9	9
					4	6	6	2	8	3	5	0	1	8	4
			4	0	2	0	2	3	5	8	0	6	6	2	4
			8	8	4	2	3	7	8	1	4	3	1	6	0
			5	8	9	6	9	1	2	8	9	7	0	3	2
										6	7	6	9	1	9

A.38

						0	1	1	8	5	3	0	3	8	1
							1	5	2	2	2	9	1	6	6
							8	7	2	0	6	1	8	4	1
										1	6	7	0	2	5
	4	4	5	4	7	1	7	0	5	1	3	2	1	7	2
							5	9	9	8	9	1	9	9	7
								3	2	3	3	6	4	4	1
				6	5	2	9	9	8	0	6	6	1	5	3
							0	5	7	8	7	9	0	7	3

A.39

			2	6	5	0	4	7	5	8	8	6	5	0	1
				5	2	7	6	9	3	0	8	7	5	2	2
									6	8	0	7	9	4	
			6	1	1	8	6	5	7	4	3	3	3	7	7
				4	0	3	2	6	4	2	6	9	4	7	9
									4	2	1	7	9	1	4
				5	8	8	6	7	9	6	8	2	1	7	0
		1	1	3	2	0	6	9	9	6	6	3	3	6	8
	6	9	7	2	0	7	4	1	1	2	7	9	2	2	0

A.40

								0	3	3	0	1	9	4	
		9	4	8	2	5	0	7	5	7	8	7	8	0	0
	2	0	1	4	2	1	9	2	2	2	6	7	2	3	7
								9	2	5	5	1	7	5	
			8	4	6	9	7	5	4	7	5	7	6	1	7
					5	9	9	0	8	8	9	5	8	9	9
								6	7	8	8	6	4	5	4
				7	9	1	8	9	9	6	8	8	5	4	7
								7	0	6	6	9	9	5	

A.41

						4	3	0	2	5	8	1	0	4	9
			8	8	5	3	8	6	2	9	3	6	8	6	2
						3	7	8	9	5	9	4	7	9	8
			4	1	3	9	6	4	0	8	0	3	2	1	5
	4	0	4	6	8	5	1	3	4	9	5	5	8	7	2
									1	4	7	5	0	4	
					6	1	7	6	6	1	2	9	7	4	8
							8	9	2	6	4	0	9	0	1
			6	7	5	6	3	8	6	4	7	1	4	3	2

A.42

						0	9	2	4	2	2	3	3	9	5
					1	4	1	3	1	8	4	5	5	5	2
			3	8	0	5	0	1	8	8	1	9	9	0	7
								9	9	8	3	6	9	2	1
		0	7	4	0	2	3	4	1	7	9	7	8	3	1
					5	0	5	7	0	7	5	6	5	4	7
							3	5	1	9	4	2	3	3	1
				3	4	3	7	5	9	2	5	9	0	3	2
								0	0	0	0	5	0	2	2

A.43

								1	8	9	4	7	0	7	7
										5	0	4	6	6	1
										4	7	8	6	3	2
								8	8	4	4	6	5	7	2
							4	5	3	4	2	1	0	3	8
				7	6	8	6	6	2	4	9	6	1	8	0
			3	1	7	7	9	3	5	4	2	3	7	2	0
				1	2	5	0	7	4	2	3	0	0	0	9
										9	0	3	2	4	6

A.44

								5	9	7	7	2	9	4	9
						3	3	2	3	9	7	6	9	0	5
						5	5	7	2	6	4	1	7	9	2
									5	0	8	0	4	6	4
				5	9	2	5	7	1	6	9	5	8	3	9
				3	1	5	6	8	7	9	1	4	7	9	5
					8	2	0	7	7	4	6	2	6	9	0
								7	8	7	6	0	1	7	0
								1	7	2	6	4	7	7	9

A.45

									9	4	1	0	8	2	5
					1	7	9	0	0	8	7	3	6	1	9
							8	9	8	6	6	9	2	0	9
									7	6	6	0	9	9	2
						8	4	9	2	8	1	3	4	6	9
	8	1	8	6	0	3	5	6	7	2	2	4	3	6	6
							4	3	7	9	5	1	2	8	6
							3	3	9	6	2	7	8	0	5
	1	8	2	9	3	3	5	7	5	6	5	7	4	4	6

A.46

									6	8	6	2	2	9	
								4	5	1	5	5	8	9	
				8	8	2	9	2	4	0	0	2	9	6	6
				2	2	8	9	3	8	0	1	1	4	7	0
		4	3	3	1	3	4	4	2	2	5	2	7	5	4
								5	8	4	6	7	1	7	4
									1	4	9	6	6	6	
			7	0	8	5	8	8	2	3	2	4	6	1	5
			9	6	0	6	7	4	1	8	6	8	0	5	6

A.47

		1	0	2	4	1	7	0	3	7	1	3	6	7	4
							1	3	8	4	0	9	4	7	2
								6	9	7	7	5	6	5	6
						5	8	7	4	3	8	1	9	8	6
						4	0	2	3	7	9	6	9	0	6
			2	5	3	4	9	9	6	5	1	3	9	1	5
							4	5	8	2	8	0	3	8	8
									9	9	6	1	0	7	3
					3	0	6	3	0	7	4	1	8	8	8

A.48

				5	7	1	2	7	5	6	0	8	7	1	8
							8	8	9	7	0	4	1	9	8
								0	2	4	8	6	7	9	2
							7	0	2	0	2	8	4	8	0
								4	7	9	9	8	7	2	6
									0	4	1	4	5	9	4
					6	7	0	9	0	2	8	1	5	6	6
		0	3	6	1	3	3	7	1	6	9	8	3	0	0
						1	9	3	8	7	0	2	7	3	8

A.49

						5	2	6	5	5	4	2	2	5	8
							5	4	5	0	3	1	9	8	9
				1	6	3	9	2	7	8	3	0	6	4	5
	3	9	9	8	0	2	4	9	7	6	3	4	3	4	6
		4	0	2	3	3	9	4	8	1	4	8	3	0	9
								9	4	7	4	7	3	7	0
								2	3	9	6	8	2	1	7
						2	2	8	3	4	5	3	3	9	6
		2	9	7	0	1	7	5	9	0	3	5	7	3	3

A.50

	3	0	3	3	8	4	6	6	2	5	2	1	9	6	4
		9	0	6	2	4	9	3	1	2	6	6	7	6	2
					6	8	1	0	7	0	0	6	8	3	7
										5	2	7	4	6	2
						3	2	9	5	6	2	6	3	7	7
					1	4	3	7	4	1	3	2	2	2	9
								9	2	0	5	3	4	4	0
			6	6	6	5	8	7	5	2	1	4	4	7	4
	2	2	1	4	0	7	2	7	1	2	3	0	6	9	6

A.51

	7	9	7	6	0	3	9	7	1	1	7	8	9	0	6
								3	8	8	7	9	0	7	0
							9	2	3	9	5	3	0	8	3
							2	3	5	0	3	3	7	9	3
	3	2	2	8	8	9	4	0	3	4	4	2	1	8	3
							2	2	9	9	0	2	0	1	4
							7	3	0	4	2	9	9	5	4
								4	5	8	9	6	7	5	4
							9	6	7	6	2	0	0	8	1

A.52

									5	1	1	7	4	5	
								3	0	2	1	3	8	6	
				3	5	6	5	4	3	0	8	1	4	7	8
	1	1	0	4	0	6	3	0	1	3	5	0	6	5	3
	7	6	9	4	1	8	8	7	7	9	9	1	2	7	3
								0	7	5	4	9	4	7	8
						5	9	7	3	4	2	4	7	3	4
								0	8	7	8	2	1	6	
				0	2	4	2	9	4	3	0	3	7	9	

A.53

									3	5	5	2	8	4	
			5	0	3	2	7	4	8	3	2	2	3	8	0
			5	1	2	5	5	5	1	0	2	9	5	8	5
										5	3	9	2	2	4
								9	2	9	2	4	0	1	0
	2	1	6	1	5	6	3	1	9	4	0	3	9	2	8
			4	9	5	7	6	8	9	3	9	8	7	8	6
										6	9	1	0	4	7
					1	6	1	0	7	2	0	6	4	6	6

A.54

					0	8	4	4	6	9	4	4	7	3	2
							7	0	6	1	5	1	0	3	9
					4	3	7	7	4	0	6	7	4	6	9
			1	8	7	2	5	2	5	3	3	9	4	3	1
	4	6	0	4	3	7	1	9	1	3	7	4	0	5	8
					7	0	0	0	9	5	9	3	8	9	7
		4	1	7	6	6	3	7	7	4	9	8	5	0	9
						1	9	3	5	5	3	3	1	8	5
										1	0	4	9	4	9

A.55

		1	0	0	6	8	6	6	2	1	0	8	8	1	6
			1	1	1	8	3	6	1	0	8	1	6	5	3
				4	7	9	4	1	5	2	2	5	7	3	0
		6	5	1	2	1	4	4	3	8	5	7	7	6	6
				7	1	9	6	3	9	0	0	4	7	3	6
				5	7	7	6	8	4	7	3	1	4	2	4
								1	3	5	8	8	5	0	2
								9	2	1	3	1	5	8	5
			9	9	5	3	8	8	4	4	1	5	2	5	1

A.56

									4	9	8	0	9	2	
									5	3	2	4	1	1	
					0	5	1	0	2	4	3	4	1	7	7
			7	2	8	5	2	4	4	2	7	3	9	4	3
	1	7	1	2	6	9	9	0	3	0	7	8	6	0	9
	8	3	9	8	3	0	5	9	2	3	8	2	2	4	5
	4	0	9	0	0	7	8	9	9	0	7	2	9	9	0
							6	3	0	0	1	0	8	9	1
					5	7	2	2	5	8	4	4	3	4	1

A.57

							7	8	6	6	5	9	1	3	8
							3	2	2	9	9	4	8	1	5
	9	0	1	9	1	1	4	3	2	6	8	5	2	0	9
									9	5	8	6	4	5	1
	6	0	8	7	5	3	2	5	9	0	5	4	3	5	3
				5	1	2	3	6	5	5	9	7	7	0	3
	8	8	7	2	6	5	2	5	5	8	3	2	9	2	1
			2	5	8	5	4	9	9	1	4	4	1	5	3
						8	4	4	0	8	9	9	8	0	9

A.58

									7	2	1	5	5	6	
		1	3	2	1	4	4	7	8	4	9	5	1	6	2
					7	8	2	8	2	6	7	1	4	8	
						5	0	9	5	6	0	7	8	9	
					9	4	6	1	3	8	1	5	9	3	1
						3	5	2	0	2	5	9	6	1	
			8	8	9	0	1	2	7	4	6	0	5	5	6
			7	3	0	3	0	2	7	7	8	3	3	9	5
										6	4	9	6	6	7

A.59

	7	7	0	5	2	9	9	7	8	0	7	4	9	7	2
			5	0	4	7	3	9	5	3	8	6	9	7	1
										2	8	7	9	6	3
	6	6	9	1	4	3	6	7	4	6	4	7	9	6	6
							2	0	3	1	4	3	4	0	8
								1	8	3	0	7	9	0	5
		3	5	4	5	6	9	0	5	8	0	2	5	6	7
						7	6	3	4	6	6	2	4	8	8
									4	3	4	9	2	7	3

A.60

									6	7	0	1	9	7	
				7	1	3	1	7	5	4	8	4	3	9	5
								5	4	2	2	8	0	4	3
									0	7	7	6	4	0	9
					4	7	0	5	6	1	3	0	7	0	
		1	5	4	5	1	7	8	7	1	9	3	3	0	4
								6	5	8	0	3	6	0	3
										3	2	3	5	0	0
								5	8	2	1	9	9	7	2

B - تمارين القسمة

قم بقسمة الأعداد التالية باستخدام طريقة التضاعف المشروحة في الفصل الرابع.

B.1	870487 ÷ 254
B.3	644736 ÷ 329
B.5	5317475 ÷ 5658
B.7	42304 ÷ 6491
B.9	3321525 ÷ 182
B.11	491631 ÷ 3325
B.13	1154126 ÷ 4286
B.15	659528 ÷ 5208
B.17	857120 ÷ 223
B.19	7649652 ÷ 3029
B.21	397547 ÷ 274
B.23	7170298 ÷ 7738
B.25	4747 ÷ 837
B.27	554031 ÷ 4372
B.29	46265 ÷ 8853
B.31	6830503 ÷ 7392
B.33	9215 ÷ 3411
B.35	8146571 ÷ 433
B.37	1988926 ÷ 3595
B.39	17698 ÷ 8839
B.41	2839378 ÷ 1344
B.43	1722 ÷ 206
B.45	203927 ÷ 6491
B.47	763933 ÷ 358
B.49	823884 ÷ 677
B.51	54848 ÷ 667
B.53	7328 ÷ 262
B.55	67471 ÷ 494
B.57	35661 ÷ 9989
B.59	4844669 ÷ 572
B.61	351625 ÷ 886
B.63	70723 ÷ 3853
B.65	933922 ÷ 484
B.67	9691893 ÷ 5068
B.69	1261 ÷ 1246
B.71	5426040 ÷ 9471
B.73	796422 ÷ 866
B.75	6367860 ÷ 5332
B.77	83501 ÷ 3580
B.79	691967 ÷ 8650
B.81	7764 ÷ 479
B.83	368969 ÷ 7922
B.85	947987 ÷ 5321
B.87	9748389 ÷ 675

B.2	926925 ÷ 202
B.4	55946 ÷ 433
B.6	507444 ÷ 2872
B.8	835954 ÷ 1458
B.10	107552 ÷ 7044
B.12	27741 ÷ 869
B.14	22130 ÷ 3437
B.16	7831341 ÷ 8427
B.18	9998489 ÷ 235
B.20	5404644 ÷ 5145
B.22	90258 ÷ 3045
B.24	6106 ÷ 456
B.26	137698 ÷ 767
B.28	48844 ÷ 202
B.30	1566680 ÷ 2782
B.32	5992 ÷ 156
B.34	845301 ÷ 5895
B.36	2947 ÷ 1105
B.38	3436141 ÷ 9249
B.40	8879 ÷ 5322
B.42	6282 ÷ 484
B.44	14078 ÷ 699
B.46	4448 ÷ 834
B.48	3691 ÷ 460
B.50	5202 ÷ 2277
B.52	306163 ÷ 783
B.54	3723 ÷ 3472
B.56	7532 ÷ 7406
B.58	7974 ÷ 1435
B.60	9098224 ÷ 4410
B.62	5182304 ÷ 529
B.64	8998893 ÷ 1035
B.66	78214 ÷ 5971
B.68	5705452 ÷ 3523
B.70	6882 ÷ 1162
B.72	5876 ÷ 315
B.74	536127 ÷ 7753
B.76	84755 ÷ 8436
B.78	2378143 ÷ 9128
B.80	7611 ÷ 2875
B.82	65886 ÷ 8113
B.84	10497 ÷ 368
B.86	349558 ÷ 504
B.88	32218 ÷ 646

B.89	2884465 ÷ 1038
B.91	30009 ÷ 941
B.93	248492 ÷ 1860
B.95	29335 ÷ 8102
B.97	9874381 ÷ 796
B.99	73530 ÷ 8452
B.101	399802 ÷ 6840
B.103	83453 ÷ 1759
B.105	923953 ÷ 3379
B.107	2995420 ÷ 3967
B.109	510295 ÷ 2452
B.111	7516 ÷ 3987
B.113	81653 ÷ 2573
B.115	6847 ÷ 588
B.117	9138 ÷ 1590
B.119	54353 ÷ 977
B.121	4844 ÷ 770
B.123	669143 ÷ 6320
B.125	76346 ÷ 492
B.127	3395 ÷ 420
B.129	215362 ÷ 737
B.131	905942 ÷ 2992
B.133	7831 ÷ 788
B.135	6168539 ÷ 357
B.137	2705194 ÷ 5635
B.139	9890 ÷ 3319
B.141	95659 ÷ 870
B.143	645419 ÷ 464
B.145	586046 ÷ 6285
B.147	9834 ÷ 8089
B.149	3196 ÷ 3011
B.151	195060 ÷ 278
B.153	580021 ÷ 199
B.155	83818 ÷ 690
B.157	78662 ÷ 7469
B.159	2501 ÷ 2218
B.161	3957 ÷ 677
B.163	6904526 ÷ 604
B.165	80516 ÷ 8157
B.167	52078 ÷ 3471
B.169	806808 ÷ 2143
B.171	8670238 ÷ 9119
B.173	1466087 ÷ 198
B.175	8327 ÷ 2997
B.177	90767 ÷ 376
B.179	768045 ÷ 1465
B.181	9670 ÷ 5668

B.90	9618073 ÷ 3720
B.92	108736 ÷ 209
B.94	663437 ÷ 396
B.96	6743 ÷ 226
B.98	99651 ÷ 2803
B.100	35450 ÷ 3927
B.102	83092 ÷ 2239
B.104	9760 ÷ 362
B.106	9902 ÷ 4034
B.108	552847 ÷ 223
B.110	92161 ÷ 928
B.112	68100 ÷ 8167
B.114	43857 ÷ 3900
B.116	4152 ÷ 1585
B.118	6852099 ÷ 960
B.120	52558 ÷ 854
B.122	497275 ÷ 6971
B.124	18307 ÷ 690
B.126	1975 ÷ 761
B.128	22620 ÷ 4659
B.130	7502099 ÷ 2539
B.132	8818 ÷ 8349
B.134	26574 ÷ 693
B.136	453342 ÷ 119
B.138	9751 ÷ 830
B.140	36880 ÷ 210
B.142	863617 ÷ 632
B.144	553792 ÷ 4364
B.146	10003 ÷ 5936
B.148	8371 ÷ 5332
B.150	3219426 ÷ 9024
B.152	3957876 ÷ 972
B.154	6011 ÷ 1340
B.156	6841 ÷ 5120
B.158	384622 ÷ 352
B.160	51598 ÷ 5575
B.162	7274515 ÷ 935
B.164	439819 ÷ 352
B.166	79812 ÷ 2693
B.168	8336743 ÷ 3778
B.170	7899639 ÷ 559
B.172	752332 ÷ 610
B.174	8045681 ÷ 2192
B.176	129581 ÷ 231
B.178	3841610 ÷ 3481
B.180	47316 ÷ 869
B.182	508952 ÷ 198

C- تمارين الضرب البسيط

قم بضرب الأعداد التالية باستخدام طريقة المناورة أو التضاعف. ضع الأجوبة الجزئية (إذا لزم الأمر) ولكن عمليات الجمع والطرح يجب أن تتم ذهنيا. حاول أن تجد الجواب بأسلوبين مختلفين كي يتم التحقق من الجواب.

C.1	11 * 9 =
C.4	32 * 25 =
C.7	92 * 13 =
C.10	47 * 10 =
C.13	60 * 23 =
C.16	76 * 51 =
C.19	72 * 20 =
C.22	44 * 5 =
C.25	78 * 28 =
C.28	73 * 4 =
C.31	75 * 2 =
C.34	89 * 86 =
C.37	78 * 68 =
C.40	79 * 65 =
C.43	72 * 18 =
C.46	41 * 21 =
C.49	50 * 37 =
C.52	63 * 39 =
C.55	77 * 62 =
C.58	13 * 9 =
C.61	29 * 3 =
C.64	31 * 30 =
C.67	32 * 29 =
C.70	45 * 9 =
C.73	56 * 4 =
C.76	35 * 6 =
C.79	54 * 8 =
C.82	97 * 45 =
C.85	24 * 11 =
C.88	74 * 56 =
C.91	97 * 5 =
C.94	61 * 29 =
C.97	57 * 8 =
C.100	40 * 6 =
C.103	79 * 32 =
C.106	60 * 6 =
C.109	27 * 5 =
C.112	52 * 2 =
C.115	80 * 5 =
C.118	74 * 70 =
C.121	35 * 20 =
C.124	90 * 17 =
C.127	34 * 4 =

C.2	53 * 9 =
C.5	31 * 24 =
C.8	47 * 36 =
C.11	87 * 5 =
C.14	44 * 24 =
C.17	26 * 6 =
C.20	81 * 37 =
C.23	90 * 56 =
C.26	53 * 52 =
C.29	49 * 16 =
C.32	59 * 47 =
C.35	42 * 29 =
C.38	71 * 9 =
C.41	41 * 9 =
C.44	62 * 7 =
C.47	85 * 9 =
C.50	31 * 21 =
C.53	72 * 50 =
C.56	83 * 81 =
C.59	70 * 33 =
C.62	53 * 7 =
C.65	16 * 2 =
C.68	67 * 56 =
C.71	28 * 2 =
C.74	20 * 2 =
C.77	87 * 73 =
C.80	80 * 57 =
C.83	94 * 62 =
C.86	93 * 85 =
C.89	36 * 20 =
C.92	53 * 6 =
C.95	18 * 6 =
C.98	62 * 27 =
C.101	73 * 49 =
C.104	84 * 79 =
C.107	72 * 29 =
C.110	12 * 9 =
C.113	91 * 68 =
C.116	49 * 48 =
C.119	87 * 24 =
C.122	84 * 16 =
C.125	83 * 4 =
C.128	76 * 29 =

C.3	38 * 4 =
C.6	36 * 8 =
C.9	57 * 30 =
C.12	99 * 42 =
C.15	86 * 14 =
C.18	45 * 4 =
C.21	94 * 4 =
C.24	47 * 41 =
C.27	14 * 6 =
C.30	93 * 72 =
C.33	94 * 11 =
C.36	45 * 4 =
C.39	97 * 62 =
C.42	56 * 7 =
C.45	30 * 3 =
C.48	84 * 54 =
C.51	99 * 82 =
C.54	81 * 3 =
C.57	99 * 81 =
C.60	69 * 32 =
C.63	77 * 62 =
C.66	92 * 46 =
C.69	27 * 22 =
C.72	87 * 73 =
C.75	78 * 8 =
C.78	67 * 14 =
C.81	33 * 6 =
C.84	27 * 8 =
C.87	46 * 39 =
C.90	96 * 86 =
C.93	27 * 8 =
C.96	81 * 46 =
C.99	48 * 15 =
C.102	69 * 5 =
C.105	93 * 85 =
C.108	67 * 4 =
C.111	88 * 9 =
C.114	63 * 3 =
C.117	96 * 3 =
C.120	67 * 9 =
C.123	78 * 3 =
C.126	88 * 9 =
C.129	45 * 5 =

C.130	46 * 4 =
C.133	80 * 38 =
C.136	89 * 84 =
C.139	74 * 9 =
C.142	76 * 68 =
C.145	17 * 9 =
C.148	12 * 5 =
C.151	52 * 49 =
C.154	91 * 9 =
C.157	40 * 3 =
C.160	69 * 54 =
C.163	77 * 69 =
C.166	81 * 9 =
C.169	56 * 7 =
C.172	91 * 9 =
C.175	55 * 34 =
C.178	69 * 48 =
C.181	80 * 4 =
C.184	75 * 66 =
C.187	51 * 24 =
C.190	93 * 6 =
C.193	91 * 61 =
C.196	51 * 4 =
C.199	40 * 27 =
C.202	91 * 30 =
C.205	27 * 9 =
C.208	27 * 7 =
C.211	45 * 4 =
C.214	81 * 64 =
C.217	57 * 6 =
C.220	50 * 11 =
C.223	77 * 2 =
C.226	29 * 13 =
C.229	18 * 8 =
C.232	53 * 7 =
C.235	75 * 55 =
C.238	62 * 17 =
C.241	44 * 15 =
C.244	84 * 3 =
C.247	68 * 2 =
C.250	23 * 8 =
C.253	92 * 36 =
C.256	29 * 20 =
C.259	53 * 42 =
C.262	66 * 9 =
C.265	34 * 12 =
C.268	46 * 2 =

C.131	52 * 28 =
C.134	81 * 8 =
C.137	61 * 51 =
C.140	37 * 3 =
C.143	77 * 55 =
C.146	31 * 17 =
C.149	66 * 5 =
C.152	91 * 7 =
C.155	99 * 7 =
C.158	30 * 4 =
C.161	41 * 7 =
C.164	38 * 33 =
C.167	77 * 7 =
C.170	79 * 58 =
C.173	86 * 5 =
C.176	46 * 17 =
C.179	66 * 5 =
C.182	47 * 40 =
C.185	99 * 22 =
C.188	91 * 18 =
C.191	54 * 39 =
C.194	72 * 8 =
C.197	80 * 5 =
C.200	16 * 3 =
C.203	43 * 38 =
C.206	61 * 5 =
C.209	68 * 2 =
C.212	83 * 6 =
C.215	78 * 56 =
C.218	76 * 55 =
C.221	69 * 9 =
C.224	66 * 64 =
C.227	69 * 6 =
C.230	69 * 9 =
C.233	84 * 6 =
C.236	53 * 4 =
C.239	47 * 3 =
C.242	87 * 66 =
C.245	27 * 4 =
C.248	42 * 20 =
C.251	38 * 5 =
C.254	64 * 61 =
C.257	60 * 16 =
C.260	92 * 81 =
C.263	57 * 55 =
C.266	48 * 31 =
C.269	61 * 5 =

C.132	16 * 4 =
C.135	18 * 4 =
C.138	79 * 50 =
C.141	91 * 7 =
C.144	96 * 54 =
C.147	78 * 6 =
C.150	71 * 21 =
C.153	65 * 4 =
C.156	41 * 26 =
C.159	59 * 8 =
C.162	90 * 6 =
C.165	62 * 41 =
C.168	59 * 52 =
C.171	66 * 66 =
C.174	60 * 49 =
C.177	31 * 9 =
C.180	42 * 11 =
C.183	63 * 49 =
C.186	61 * 58 =
C.189	60 * 56 =
C.192	16 * 2 =
C.195	95 * 38 =
C.198	39 * 4 =
C.201	80 * 60 =
C.204	67 * 7 =
C.207	73 * 20 =
C.210	90 * 59 =
C.213	80 * 14 =
C.216	42 * 8 =
C.219	24 * 11 =
C.222	71 * 2 =
C.225	90 * 4 =
C.228	21 * 4 =
C.231	89 * 17 =
C.234	51 * 29 =
C.237	22 * 8 =
C.240	24 * 7 =
C.243	34 * 29 =
C.246	72 * 3 =
C.249	89 * 4 =
C.252	93 * 32 =
C.255	64 * 25 =
C.258	45 * 6 =
C.261	68 * 5 =
C.264	79 * 43 =
C.267	42 * 9 =
C.270	58 * 6 =

D- تمارين الضرب الطويل

قم بضرب الأعداد التالية باستخدام طريقة التضاعف. استخدم ورقة مربعات إذا لزم الأمر.

D.1	96267 * 54446
D.3	42188221465 * 21211220202
D.5	347815501096 * 2912202
D.7	92106213938 * 5569910
D.9	3770089033 * 36476
D.11	6398725930865 * 6243216516389
D.13	611787467203 * 3047054
D.15	5752747 * 658630
D.17	8034563 * 1690064
D.19	375469892 * 5191
D.21	1425254182324 * 68824
D.23	9756581258696 * 854086
D.25	5693576 * 2386994
D.27	11679499463 * 657590285
D.29	28862402187 * 69794
D.31	4897350 * 748110
D.33	22435108 * 9045569
D.35	9337052862201 * 837463
D.37	265510 * 3973
D.39	89768022 * 494010
D.41	909200271221 * 53079
D.43	111029898 * 4810
D.45	249206420 * 8369447
D.47	4201470807448 * 2069299
D.49	5891479957465 * 510655441354
D.51	21757 * 1624
D.53	11916557469 * 7320
D.55	2777926 * 411153
D.57	616902224724 * 993221
D.59	8529891561571 * 34615
D.61	67229986006 * 297768
D.63	8057605365 * 9585
D.65	6876480713643 * 376412
D.67	26107402808 * 6684480
D.69	5772567233 * 3754346188
D.71	85433604695 * 74863383
D.73	4551137331238 * 2565264
D.75	27320302 * 3446
D.77	4241046069 * 38829770
D.79	71810819618 * 83420998
D.81	51264345 * 50079322
D.83	73275562344 * 155292
D.85	15513561 * 41225
D.87	6963072613 * 909756080
D.89	9443351 * 936837
D.91	695075015 * 8653057
D.93	823000519839 * 3857323782
D.95	85526 * 5239
D.97	81667698887 * 27260
D.99	330495735469 * 276252911
D.101	101206840 * 720584
D.103	69295110780 * 1964922

D.2	12656238345 * 263155589
D.4	1797100 * 1310
D.6	8594479343 * 643340223
D.8	6003242767723 * 51644806
D.10	828696547 * 36214646
D.12	9625858170105 * 31633749
D.14	9268208063 * 8871
D.16	3869940484385 * 30026071364
D.18	88130585 * 7108
D.20	6247180904000 * 2969
D.22	6160151853 * 280762
D.24	996200969383 * 986404
D.26	43444458433 * 928726
D.28	5114661232201 * 944141111
D.30	395424365 * 63966
D.32	23269506 * 7539
D.34	5099034 * 214695
D.36	285838622384 * 92493
D.38	8584190117 * 11194869
D.40	4525807 * 86821
D.42	2976429838 * 21345
D.44	27122936 * 574102
D.46	19043216363 * 1895789
D.48	397747558248 * 72219950239
D.50	10368963431 * 60000
D.52	51059421031 * 287744
D.54	1626867059862 * 33955
D.56	70519355354 * 3747
D.58	36033247 * 8778
D.60	638683047768 * 1714486806
D.62	130247806 * 9239
D.64	150894 * 58806
D.66	44507471 * 31239
D.68	127733429936 * 3620568
D.70	4162 * 3051
D.72	2849229122 * 8766159
D.74	50079714059 * 6914
D.76	908905 * 362158
D.78	228010224 * 678577
D.80	267496028010 * 48631624
D.82	818768637812 * 85355403125
D.84	6417 * 3757
D.86	745214598035 * 3471049
D.88	7136411368 * 556472903
D.90	4026421387 * 82878999
D.92	845617951849 * 80595
D.94	805803060 * 26467253
D.96	768326382 * 6072761
D.98	342692912021 * 31500
D.100	3389783272 * 2977
D.102	839565916479 * 53344623
D.104	825189307 * 27472662

E- أجوبة التمارين

A.1:	41485818257352
A.3:	355766109871001
A.5:	2991583101208006
A.7:	859608585259832
A.9:	13089123381097
A.11:	921548180327796
A.13:	909296912849358
A.15:	31739810583009
A.17:	12463829828220
A.19:	3143883522073572
A.21:	68806242042821
A.23:	357589393811425
A.25:	439539225421349
A.27:	11728453895208
A.29:	514118215283419
A.31:	989927336551521
A.33:	42154966368404
A.35:	920219920113345
A.37:	50347374751230
A.39:	718816886200345
A.41:	424505776261381
A.43:	4072234851135
A.45:	1001565229889017
A.47:	12817905574958
A.49:	469910345392263
A.51:	1120496546335838
A.53:	231288509870710
A.55:	88039196145463
A.57:	2401037372454552
A.59:	1480185814663513

A.2:	1272403041162996
A.4:	1597206423005128
A.6:	51321396560935
A.8:	63543478955303
A.10:	2805541056065
A.12:	69415186411585
A.14:	380233732838207
A.16:	62048306921358
A.18:	9726261835275
A.20:	441272729279465
A.22:	25429114955221
A.24:	122134193872866
A.26:	104488901676999
A.28:	221116901385864
A.30:	997808024629708
A.32:	53911504903629
A.34:	4530863842698
A.36:	123469352055488
A.38:	446126536294249
A.40:	305568645935918
A.42:	11617198486538
A.44:	999394570383
A.46:	61117992278519
A.48:	04255318924112
A.50:	622168609580241
A.52:	880190137239342
A.54:	504200966607269
A.56:	1427456598127699
A.58:	29510938780165
A.60:	16169848312493

B.1	3427 + 29/254
B.3	1959 + 225/329
B.5	939 + 4613/5658
B.7	6 + 3358/6491
B.9	18250 + 25/182
B.11	147 + 2856/3325
B.13	269 + 1192/4286
B.15	126 + 3320/5208
B.17	3843 + 131/223
B.19	2525 + 1427/3029
B.21	1450 + 247/274
B.23	926 + 4910/7738
B.25	5 + 562/837
B.27	126 + 3159/4372
B.29	5 + 2000/8853
B.31	924 + 295/7392
B.33	2 + 2393/3411
B.35	18814 + 109/433
B.37	553 + 891/3595
B.39	2 + 20/8839
B.41	2112 + 850/1344
B.43	8 + 74/206
B.45	31 + 2706/6491
B.47	2133 + 319/358
B.49	1216 + 652/677
B.51	82 + 154/667
B.53	27 + 254/262
B.55	136 + 287/494
B.57	3 + 5694/9989
B.59	8469 + 401/572
B.61	396 + 769/886
B.63	18 + 1369/3853
B.65	1929 + 286/484
B.67	1912 + 1877/5068
B.69	1 + 15/1246
B.71	572 + 8628/9471
B.73	919 + 568/866
B.75	1194 + 1452/5332
B.77	23 + 1161/3580
B.79	79 + 8617/8650
B.81	16 + 100/479
B.83	46 + 4557/7922
B.85	178 + 849/5321
B.87	14442 + 39/675
B.89	2778 + 901/1038
B.91	31 + 838/941
B.93	133 + 1112/1860
B.95	3 + 5029/8102
B.97	12405 + 1/796
B.99	8 + 5914/8452
B.101	58 + 3082/6840
B.103	47 + 780/1759
B.105	273 + 1486/3379
B.107	755 + 335/3967
B.109	208 + 279/2452

B.2	4588 + 149/202
B.4	129 + 89/433
B.6	176 + 1972/2872
B.8	573 + 520/1458
B.10	15 + 1892/7044
B.12	31 + 802/869
B.14	6 + 1508/3437
B.16	929 + 2658/8427
B.18	42546 + 179/235
B.20	1050 + 2394/5145
B.22	29 + 1953/3045
B.24	13 + 178/456
B.26	179 + 405/767
B.28	241 + 162/202
B.30	563 + 414/2782
B.32	38 + 64/156
B.34	143 + 2316/5895
B.36	2 + 737/1105
B.38	371 + 4762/9249
B.40	1 + 3557/5322
B.42	12 + 474/484
B.44	20 + 98/699
B.46	5 + 278/834
B.48	8 + 11/460
B.50	2 + 648/2277
B.52	391 + 10/783
B.54	1 + 251/3472
B.56	1 + 126/7406
B.58	5 + 799/1435
B.60	2063 + 394/4410
B.62	9796 + 220/529
B.64	8694 + 603/1035
B.66	13 + 591/5971
B.68	1619 + 1715/3523
B.70	5 + 1072/1162
B.72	18 + 206/315
B.74	69 + 1170/7753
B.76	10 + 395/8436
B.78	260 + 4863/9128
B.80	2 + 1861/2875
B.82	8 + 982/8113
B.84	28 + 193/368
B.86	693 + 286/504
B.88	49 + 564/646
B.90	2585 + 1873/3720
B.92	520 + 56/209
B.94	1675 + 137/396
B.96	29 + 189/226
B.98	35 + 1546/2803
B.100	9 + 107/3927
B.102	37 + 249/2239
B.104	26 + 348/362
B.106	2 + 1834/4034
B.108	2479 + 30/223
B.110	99 + 289/928

B.111	1 + 3529/3987
B.113	31 + 1890/2573
B.115	11 + 379/588
B.117	5 + 1188/1590
B.119	55 + 618/977
B.121	6 + 224/770
B.123	105 + 5543/6320
B.125	155 + 86/492
B.127	8 + 35/420
B.129	292 + 158/737
B.131	302 + 2358/2992
B.133	9 + 739/788
B.135	17278 + 293/357
B.137	480 + 394/5635
B.139	2 + 3252/3319
B.141	109 + 829/870
B.143	1390 + 459/464
B.145	93 + 1541/6285
B.147	1 + 1745/8089
B.149	1 + 185/3011
B.151	701 + 182/278
B.153	2914 + 135/199
B.155	121 + 328/690
B.157	10 + 3972/7469
B.159	1 + 283/2218
B.161	5 + 572/677
B.163	11431 + 202/604
B.165	9 + 7103/8157
B.167	15 + 13/3471
B.169	376 + 1040/2143
B.171	950 + 7188/9119
B.173	7404 + 95/198
B.175	2 + 2333/2997
B.177	241 + 151/376
B.179	524 + 385/1465
B.181	1 + 4002/5668

B.112	8 + 2764/8167
B.114	11 + 957/3900
B.116	2 + 982/1585
B.118	7137 + 579/960
B.120	61 + 464/854
B.122	71 + 2334/6971
B.124	26 + 367/690
B.126	2 + 453/761
B.128	4 + 3984/4659
B.130	2954 + 1893/2539
B.132	1 + 469/8349
B.134	38 + 240/693
B.136	3809 + 71/119
B.138	11 + 621/830
B.140	175 + 130/210
B.142	1366 + 305/632
B.144	126 + 3928/4364
B.146	1 + 4067/5936
B.148	1 + 3039/5332
B.150	356 + 6882/9024
B.152	4071 + 864/972
B.154	4 + 651/1340
B.156	1 + 1721/5120
B.158	1092 + 238/352
B.160	9 + 1423/5575
B.162	7780 + 215/935
B.164	1249 + 171/352
B.166	29 + 1715/2693
B.168	2206 + 2475/3778
B.170	14131 + 410/559
B.172	1233 + 202/610
B.174	3670 + 1041/2192
B.176	560 + 221/231
B.178	1103 + 2067/3481
B.180	54 + 390/869
B.182	2570 + 92/198

C.1	99
C.4	800
C.7	1196
C.10	470
C.13	1380
C.16	3876
C.19	1440
C.22	220
C.25	2184
C.28	292
C.31	150
C.34	7654
C.37	5304
C.40	5135
C.43	1296
C.46	861
C.49	1850
C.52	2457
C.55	4774
C.58	117
C.61	87
C.64	930
C.67	928
C.70	405
C.73	224
C.76	210
C.79	432
C.82	4365
C.85	264
C.88	4144
C.91	485
C.94	1769
C.97	456
C.100	240
C.103	2528
C.106	360
C.109	135
C.112	104
C.115	400
C.118	5180
C.121	700
C.124	1530
C.127	136
C.130	184
C.133	3040
C.136	7476
C.139	666
C.142	5168
C.145	153
C.148	60

C.2	477
C.5	744
C.8	1692
C.11	435
C.14	1056
C.17	156
C.20	2997
C.23	5040
C.26	2756
C.29	784
C.32	2773
C.35	1218
C.38	639
C.41	369
C.44	434
C.47	765
C.50	651
C.53	3600
C.56	6723
C.59	2310
C.62	371
C.65	32
C.68	3752
C.71	56
C.74	40
C.77	6351
C.80	4560
C.83	5828
C.86	7905
C.89	720
C.92	318
C.95	108
C.98	1674
C.101	3577
C.104	6636
C.107	2088
C.110	108
C.113	6188
C.116	2352
C.119	2088
C.122	1344
C.125	332
C.128	2204
C.131	1456
C.134	648
C.137	3111
C.140	111
C.143	4235
C.146	527
C.149	330

C.3	152
C.6	288
C.9	1710
C.12	4158
C.15	1204
C.18	180
C.21	376
C.24	1927
C.27	84
C.30	6696
C.33	1034
C.36	180
C.39	6014
C.42	392
C.45	90
C.48	4536
C.51	8118
C.54	243
C.57	8019
C.60	2208
C.63	4774
C.66	4232
C.69	594
C.72	6351
C.75	624
C.78	938
C.81	198
C.84	216
C.87	1794
C.90	8256
C.93	216
C.96	3726
C.99	720
C.102	345
C.105	7905
C.108	268
C.111	792
C.114	189
C.117	288
C.120	603
C.123	234
C.126	792
C.129	225
C.132	64
C.135	72
C.138	3950
C.141	637
C.144	5184
C.147	468
C.150	1491

C.151	2548
C.154	819
C.157	120
C.160	3726
C.163	5313
C.166	729
C.169	392
C.172	819
C.175	1870
C.178	3312
C.181	320
C.184	4950
C.187	1224
C.190	558
C.193	5551
C.196	204
C.199	1080
C.202	2730
C.205	243
C.208	189
C.211	180
C.214	5184
C.217	342
C.220	550
C.223	154
C.226	377
C.229	144
C.232	371
C.235	4125
C.238	1054
C.241	660
C.244	252
C.247	136
C.250	184
C.253	3312
C.256	580
C.259	2226
C.262	594
C.265	408
C.268	92

C.152	637
C.155	693
C.158	120
C.161	287
C.164	1254
C.167	539
C.170	4582
C.173	430
C.176	782
C.179	330
C.182	1880
C.185	2178
C.188	1638
C.191	2106
C.194	576
C.197	400
C.200	48
C.203	1634
C.206	305
C.209	136
C.212	498
C.215	4368
C.218	4180
C.221	621
C.224	4224
C.227	414
C.230	621
C.233	504
C.236	212
C.239	141
C.242	5742
C.245	108
C.248	840
C.251	190
C.254	3904
C.257	960
C.260	7452
C.263	3135
C.266	1488
C.269	305

C.153	260
C.156	1066
C.159	472
C.162	540
C.165	2542
C.168	3068
C.171	4356
C.174	2940
C.177	279
C.180	462
C.183	3087
C.186	3538
C.189	3360
C.192	32
C.195	3610
C.198	156
C.201	4800
C.204	469
C.207	1460
C.210	5310
C.213	1120
C.216	336
C.219	264
C.222	142
C.225	360
C.228	84
C.231	1513
C.234	1479
C.237	176
C.240	168
C.243	986
C.246	216
C.249	356
C.252	2976
C.255	1600
C.258	270
C.261	340
C.264	3397
C.267	378
C.270	348

D.1	5241353082
D.3	894863655424858035930
D.5	1012908997922773392
D.7	513023322075405580
D.9	137517767567708
D.11	39948631415422946553446485
D.13	1864149449090769962
D.15	3788931756610
D.17	13578925682032
D.19	1949064209372
D.21	98091693844266976
D.23	8332959460914631856
D.25	13590531750544
D.27	7680325380531516955
D.29	2014422498239478
D.31	3663756508500
D.33	202938317436452
D.35	7819436301137436063
D.37	1054871230
D.39	44346300548220
D.41	48259441196139459
D.43	534053809380
D.45	2085719924249740
D.47	8694099340381338952
D.49	3008516297907534722007610
D.51	35333368
D.53	87229200673080
D.55	1142152608678
D.57	612720244542596004
D.59	295262196403780165
D.61	20018938473034608
D.63	77232147423525
D.65	2588389858383788916
D.67	174514411922019840
D.69	21672215786187257804
D.71	6395848669352383185
D.73	11674868754880916832
D.75	94145760692
D.77	164678843418674130
D.79	5990530239731538764
D.81	2567283640374090
D.83	11379108627524448
D.85	639546552225
D.87	6334697645158237040
D.89	8846880620787
D.91	6014523724070855
D.93	3174579477773337511098
D.95	448070714
D.97	2226261471659620
D.99	91300408996397200259

D.2	3330559856202860205
D.4	2354201000
D.6	5529174257094513489
D.8	310036308109957396738
D.10	30010952091027362
D.12	304501981262700873645
D.14	82218273726873
D.16	116199109158576737651140
D.18	626432198180
D.20	18547880103976000
D.22	1729536554551986
D.24	982656621003268732
D.26	40347998102646358
D.28	4828961938158881115311
D.30	25293714931590
D.32	175428805734
D.34	1094737104630
D.36	26438071700163312
D.38	96098883830909673
D.40	392935089547
D.42	63531894892110
D.44	15571331803472
D.46	36101920105595407
D.48	28725308864354314021272
D.50	622137805860000
D.52	14692042045144064
D.54	55240271017614210
D.56	264236024511438
D.58	316299842166
D.60	1095013658614103749008
D.62	1203359479634
D.64	8873472564
D.66	1390368886569
D.68	462467568956523648
D.70	12698262
D.72	24976795510882398
D.74	346251143003926
D.76	329167216990
D.78	154722493771248
D.80	13008766255675788240
D.82	69886327146550377962500
D.84	24108669
D.86	2586676385294788715
D.88	3971219550953161304
D.90	333705774106751613
D.92	68152578829270155
D.94	21327393457194180
D.96	4665862487880702
D.98	10794826728661500
D.100	10091384800744